

## 1 前書き



この記事は未完成です。特にネタが。これ以上待たせるわけにはいかないので submit しますが、今後さらなる拡張をなす予定で一杯です。  
ネタも完備された情報数学のしけぶりなども検閲が終わり次第送りましょう。



質問、さらなる拡張の要望ございましたらお願いします。教材書くのはとても勉強になるので。とかいいながら、ほとんど自分用なのでだいぶ分かりにくいとは思いますが。

## 2 仏陀再誕



### 私は再誕した



毒キノコでも食べて気が狂ったか？



何をいう！

私は仏陀の生まれ変わりだ！

見るがいい！王族のコネを利用して女遊びを繰り返し鍛えられた・・・



きらっ



アッ！

私の御柱が表示されないぞ。くそー。量子光学の力でその光を消し去ってくれる！

## 1

## 量子光学まとめ

## 作図さぼり気味

しけたい4 (頑張れ AA 職人)

## 1 覚えておきたい物理量、式

最初の最初に量子光学でよく使うであろう物理量を定義しておきましょう。

双極子モーメント

$$\vec{\mu} = -e\vec{r}$$

求める固有関数

$$\psi(r, t) \equiv |\psi(t)\rangle$$

摂動に使うブラケット

$$\psi_n(r) = |r\rangle$$

行列化したハミルトニアン

$H$  を固有関数  $\psi_n(r) \equiv |n\rangle$  で分解するとき、行列化したハミルトニアンは

$$H_{nm} = \langle n|H|m\rangle \quad \text{となります。}$$

さらに、波動関数  $\psi(t, r) = \sum C_n(t)\psi_n(r)$  としたとき

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{より}$$

$$H\psi = \sum_{l,n,m} (|n\rangle\langle n|)H(|m\rangle\langle m|)C_l|l\rangle = \sum_{n,l} = \sum_{n,l} H_{nl}C_l|n\rangle$$

となります。ここから  $\dot{C}_n = \sum_{\mu} H_{n\mu}C_{\mu}$  となります。

Maxwell 方程式と物理量の定義

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{J}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{分極の定義}) \quad \vec{E} = \sigma \vec{J} \quad (\sigma \text{ は伝導率}) \quad \lambda \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Maxwell 方程式から求められる関係式

$$(\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = (\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$(\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = (\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = -\mu \nabla \times \vec{J}$$

$n$  は屈折率。 $n$  を複素数で表記すると、実部は速度変化、虚部は減衰のパラメータになる。波数  $k$  は  $n\omega/c$  であらわされる。



立方体の内部に於ける固有モードの数 (詳細は Appendix)

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \left( \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \text{ をかけると } \omega \text{ の波のエネルギー期待値} \right)$$

Einstein の A、B 定数

$$A = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \hbar\omega B, \quad B = \frac{\pi |p_{ba}|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2}$$

$$AN_b + B\rho(\omega)(N_b - N_a) = 0 \text{ (プランクの式)}$$



量子化された電場 (詳細は Appendix)

$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \vec{e}_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{r}))$$

$$\hat{B} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\vec{k}} V}} \vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{k} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{r}))$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}] = 1$$

## 2 重要：非線形光学



とても難しそうな気がしますが、やることはいたってシンプルです。ここでは定義とテンソルの使用に慣れることを目的とした、対称性をもった結晶の話します。



従来の線形光学：

$$P_i = \epsilon_0 \lambda_{ij}^{(1)} E_j \text{ (添え字は } x, y, z \text{)}$$

非線形光学のルール：

$$P_i = \epsilon_0 \lambda^{(1)} E_i + \epsilon_0 \lambda_{ijk} E_j E_k + \dots \text{ (添え字は } x, y, z \text{)}$$

テンソルの添え字の縮約のルールはよろしいですね。

おなじみの定義

$$E = E^{\omega} e^{-i(\omega t - kz)} + E^{\omega*} e^{i(\omega t - kz)}$$

ようは、進行方向を  $z$  軸、角速度  $\omega$  の波の重ね合わせとしています。  $\omega$  成分であることの表記は頭に添え字をつけて表現しています。これを用いれば、 $P$  を成分ごとに分離するのが楽になります。あと次数を数字の添え字で表現します。

$$\text{例： } P_i = \lambda_{ijk} E_j^{\omega} E_k^{\omega*}$$



ルールは本当にこれだけです。「ちょっといいのかよ」とも思ってしまうのですが、テンソルの特性を舐めてかかると火傷します。ちょっと練習をしましょう。

2.1  $\lambda^{(1)}$  の練習

(1) 完全に等方の場合

$E_x = A, E_y = B, E_z = 0$  の場合を考えましょう。

$P_x^{(1)} = \epsilon_0 \lambda^{xx} A + \lambda^{xy} B$ 。  $x$  軸の電場を逆にすれば分極も逆になるはずで、また、 $\lambda^{(1)}$  は不変なので。

$$-P_x^{(1)} = \epsilon_0 \lambda^{xx} - A + \lambda^{xy} B$$

以上より  $\lambda_{ij}^{(0)} \quad (i \neq j) = 0$  が解る。

2.2  $\lambda^{(2)}$  の練習

(1) 完全に等方の場合

$E$  を逆にすると  $P$  も逆になるはずである。また、 $\lambda^{(2)}$  は不変なので。

$$-P^{(2)} = \epsilon_0 \lambda_{ijk} (-E_j) (-E_k)$$

以上より完全な等方では 2 次の非線形応答は起こりません。



他のパターンも随時

## 3 必要な量子力学の知識：密度行列

量子光学では時間発展する系の摂動展開を頻繁に使います。以下の摂動の形は暗記しましょう。



$|\psi_s(t)\rangle$  (波動関数)  $\hat{H} = \hat{H}_0 + V(t)$  (ハミルトニアン)

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_s(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi_s(t)\rangle \quad (\text{sh eq})$$

$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$  (展開する関数)

$$\phi_s(t) = \sum_n C_n^s(t) |n\rangle = \sum_n C_n^s(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (\text{摂動展開})$$

$$\rho = |\psi_s(t)\rangle \langle \psi_s(t)| = \sum_{mn} C_n^{s*} C_m^s |n\rangle \langle m|$$

とし、密度行列  $\rho_{nm}$  を

$$\rho_{nm} \equiv \langle n | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | m \rangle \quad \text{とします。}$$

このとき  $A$  の期待値は

$$\langle A \rangle = \langle \psi_s(t) | \hat{A} | \psi_s(t) \rangle = \sum_{mn} C_m^{s*}(t) C_n^s(t) A_{mn}$$

$A_{mn} \equiv \langle m | \hat{A} | n \rangle$  とすれば

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad \text{となります。}$$





密度行列の各々の成分はお察しの通り摂動などで求めることができます。さて、密度行列の応用として混合状態についても軽く確認しましょう。混合状態とは平たく言えば純粋状態が重ね合わさった状態です。



式で書けば、純粋状態のハミルトニアンは  $H_0$  であらわされるところを、複数の  $H_0^s$  が割合  $\omega_s$  で混合されている状態です。この状態での摂動もやることは同じです。どうやらシンプルに線形で重ね合わせたハミルトニアンではなく、確率  $\omega_s$  でハミルトニアンが  $H_0^s$  となると考えたほうがよさそうです。



複合状態での密度行列は

$$\rho_{nm} = \sum_s \omega_s C_m^{s*} C_n^s$$

とします。このときの物理量の期待値は

$$\langle \bar{A} \rangle = \sum_s \omega_s \sum_{mn} C_m^{s*}(t) C_n^s A_{mn} \text{ より}$$

$\langle A \rangle = Tr(\rho A)$  と同じように表記することができます。これは便利です。



さて、時間発展の摂動の解き方は覚えていますか？ 密度行列の満たす式は

$$\dot{\rho}_{nm} = \sum_s \dot{\omega}_s C_m^{s*} C_n^s + \sum_s \omega_s \frac{d}{dt} (C_m^{s*} C_n^s) \text{ です。}$$

$\dot{\omega}_s = 0$  を仮定し、さらに先ほど用いた摂動展開での式を用いると

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} &= \sum_s \omega_s (C_n^s(\frac{i}{\hbar}) \sum_\nu H_{m\nu}^* C_\nu^{s*} + C_m^{s*}(-\frac{i}{\hbar}) \sum_\nu H_{n\nu} C_\nu^s) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]_{nm} \end{aligned}$$

Lionville の式と呼びます。これを解けば時間発展が追えます。



演習問題：

$$\text{ハミルトニアン : } \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$$

$$(H_0)_{nm} = E_n \delta_n^m$$

とすると、 $[H_0, \rho]_{nm} = (E_n - E_m) \rho_{nm}$  であることを確認せよ。



結局のところ：

$$\dot{\rho}_{nm} = -i\omega_{nm} - \frac{i}{\hbar} [H_I, \rho]_{nm}$$

$$\omega_{nm} \equiv \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

となるおなじみの式が出てきます。



ちょっと例と遊びましょう。二準位系を用意します。

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_1^* & C_1 C_2^* \\ C_2 C_1^* & C_2 C_2^* \end{bmatrix}$$



$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{12} = \int \psi_1^*(-er)\psi_2 d^3r$$

$$\langle \mu \rangle = Tr(\rho\mu) = \rho_{12}\mu_{21} + \rho_{21}\mu_{12}$$

$\rho_{ii}$  :  $i$  準位に居る粒子の数  
 $\rho_{ij}$  : 分極  
 結局上記のように扱うことができます。

## 4 密度行列の代表的応用例：マスター方程式



相互作用のハミルトニアンを

$$\hat{H}_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(t) = V \text{ として}$$

$$H_I = \begin{bmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

とすると、密度行列の運動方程式は

$$\dot{\rho}_{21} = \frac{i}{\hbar}(\rho_{21}(E_1 - E_2)) + \frac{i}{\hbar}V_{21}(\rho_{22} - \rho_{11}) = -i\omega_{21}\rho_{21} + \frac{i}{\hbar}V_{21}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_{21}\rho_{12} - \frac{i}{\hbar}V_{12}(\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\dot{\rho}_{22} = -\frac{i}{\hbar}(V_{21}\rho_{12} - V_{12}\rho_{21})$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\frac{i}{\hbar}(V_{12}\rho_{21} - V_{21}\rho_{12})$$

これがマスター方程式です。これらはものすごい性質を秘めていて、閉じた系では

$$\dot{\rho}_{22} + \dot{\rho}_{11} = 0, \quad \rho_{22} + \rho_{11} = 1 \text{ となっています。}$$



## 5 マスター方程式の応用：ブロッホ方程式

マスター方程式のさらなる応用でブロッホ方程式があります。マスター方程式を以下の変数で書き直します

$$\rho_x = \rho_{21} + \rho_{12} = 2Re(\rho_{21}) = 2Re(\rho_{12})$$

$$\rho_y = \frac{1}{i}(\rho_{21} - \rho_{12}) = 2Im(\rho_{21}) = -2Im(\rho_{12})$$

$$\rho_z = \rho_{22} - \rho_{11}$$

すると微分方程式は以下ようになります。

$$\dot{\rho}_x = -\omega_0\rho_y + \frac{i}{\hbar}(V_{21} - V_{12})\rho_z$$

$$\dot{\rho}_y = \omega_0\rho_x - \frac{1}{\hbar}(V_{21} + V_{12})\rho_z$$

$$\dot{\rho}_z = -\frac{i}{\hbar}(V_{21} - V_{12})\rho_x + \frac{1}{\hbar}(V_{21} + V_{12})\rho_y$$

$$(\omega_0 \equiv \omega_{21})$$





これをベクトル表記すると

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hbar}(V_{21} + V_{12}) \\ \frac{i}{\hbar}(V_{21} - V_{12}) \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\hbar} \text{Re}(V_{12}) \\ \frac{2}{\hbar} \text{Im}(V_{12}) \\ \omega_0 \end{bmatrix} \text{ となります。}$$

## 6 光ブロッホ方程式



$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F} \times \vec{\rho}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\hbar} \text{Re}(V_{12}) \\ \frac{2}{\hbar} \text{Im}(V_{12}) \\ \omega_0 \end{bmatrix}$$

この式を追いかけていきましょう。



$V_{12} \neq 0$  の場合

$$V_{12} = -\frac{1}{2}\mu_{12}(E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t}) \equiv -\frac{1}{2}\mu_{12}(\vec{F}^- + \vec{F}^+)$$

と分解できると仮定しましょう。

$\omega \sim \omega_0$  の時は、 $+\omega$  での回転座標系では  $\vec{F}^+$  はほぼ静止、 $\vec{F}^-$  は  $2\omega$  で時計回りに回ります。後者を無視した場合、回転運動と近似可能です。



次に、 $z$  軸周りに  $\omega$  で回転する座標系  $x'y'$  系では、時間微分は駒場でやったとおり

$$\frac{\delta\vec{\rho}}{\delta t} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

となるので、

$$\frac{\delta\vec{\rho}}{\delta t} = (\vec{F} - \vec{\omega}) \times \vec{\rho} = \vec{F}' \times \vec{\rho}, \quad \vec{F}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{\hbar} \text{Re}(V_{12}) \\ \frac{2}{\hbar} \text{Im}(V_{12}) \\ \omega_0 - \omega \end{bmatrix}$$

$$\chi^* = \frac{\mu_{12} E_0^*}{\hbar}$$

$\vec{\rho}$  は  $\vec{F}'$  の周りで角速度  $|F' - \omega| = \sqrt{|\chi|^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \Omega$  で際差運動します。



ちょっと具体例をやってみましょう。 $t=0$  で基底状態に居て、 $\omega = \omega_0$  の共振の場合を考えて見ましょう。この場合、基底状態から  $z$  軸零のベクトルを中心にくるぐる回ります。ようは、サインカーブをエネルギーが描きます。言葉で行ってもワカリマセンね。このあたりは簡単な式を追いかけるだけなので自力でやってみましょう。E が時間変化する場合も然り。



更に回転座標系  $(x', y', z')$  での  $\vec{\rho}$  の成分を  $(u, v, \omega)$  とすると ( $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ )

$$\dot{u} = \Delta v - \text{Im}\chi^* \omega$$

$$\dot{v} = -\Delta u + \text{Re}\chi^* \omega$$

$$\dot{\omega} = \text{Im}\chi^* u - \text{Re}\chi^* v$$

$u, v, \omega$  は  $\rho_{ij}$  に還元すると



$$(u + iv)e^{i\omega t} = \rho_x + i\rho_y = 2\rho_{12}$$

$$\omega = \rho_z = \rho_{22} - \rho_{11}$$

となります。こいつにも今後応用が入っていますよ。



まあ、見てのとおり幾何学でとらえやすい形になってくれるわけですね。

## 7 輻射場と2準位系の相互作用（半古典論）—純粋状態

----- E2

~

----- E1



重要な Rabi 周波数を導出しましょう。以上のような場を考えます。関与するのはこの2つの準位だけとなるような状態を仮定します。これに対してハミルトニアンと摂動などの各種近似を決めつけて解いていきたいと思います。



光などの無い原子系のシュレディンガーさんは

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

$$\Psi_n(r, t) = e^{iE_n t/\hbar} \Psi_n(r)$$

$$\hat{H}_0 \Psi_n(r) = E_n \Psi_n(r)$$

となっています。ハミルトニアンと電場は以下のようにします。

電場：

$$\vec{E}(r, t) = (0, 0, E(r, t))$$

$$E(r, t) = \frac{1}{2}(E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.)$$

ハミルトニアン：

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2 A^2}{2m}$$

最後の項はイオン化が起こる程度に強い光が入ってきたときのみ影響するものです。

ここでは無視してしまいます。



さらに、以下のようなものを定義します。

$$H_I = \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A} \rightarrow e\vec{r} \cdot \vec{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\mu} = -e\vec{r}$$

ここに大事な大事な電気双極子近似を用います。以下のような近似です。

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots \approx 1$$



【なぜこんな近似が出来るか】

$$\hbar\omega_n = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 m_0}{n^3 \hbar^2} \text{ (水素モデル)}$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Z e^2 m_0} \text{ (水素モデル)}$$

より

$$\hbar\omega_n = \frac{Z e^2}{r_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} = \frac{\hbar c 4\pi\epsilon_0 r_n}{Z e^2} = \frac{137}{Z} r_n$$

より、 $kr_n = \frac{Z}{137} \ll 1$



これを用いれば

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \dots \approx 1$$

が示せます。



さて、こいつらを使ってシュレディンガーさんを解きましょう。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) \Psi$$

$$\Psi(r, t) = c_1(t) \Psi_1(r, t) + c_2(t) \Psi_2(r, t) \text{ (2 状態の波動関数の重ね合わせと仮定)}$$

この2つの条件から

$$i\hbar(\dot{c}_1 \Psi_1 + \dot{c}_2^* \Psi_2) = \hat{H}_I(c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2)$$

が成り立ちます。



左から  $\Psi_1^*$  をかけて積分します ( $\omega_0 \equiv \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ )

$$i\hbar \dot{c}_1 = c_1 \int \Psi_1^* \hat{H}_I \Psi_1 dv + c_2 e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} \int \Psi_1^* \hat{H}_I \Psi_2 dv$$

対称性から第一項は0になります。二つ目の積分部分を  $-M_{12} \frac{1}{2} (E_0 e^{-i\omega t} + c.c.)$  とすると



$$\dot{c}_1 = i \frac{M_{12}}{2\hbar} (E_0^* e^{-i(\omega_0 - \omega)t} + E_0^* e^{-i(\omega_0 + \omega)t}) c_2$$

$$\dot{c}_2 = i \frac{M_{21}}{2\hbar} (E_0^* e^{i(\omega_0 - \omega)t} + E_0^* e^{i(\omega_0 + \omega)t}) c_1$$

次は回転波近似を考えましょう。これは  $e^{\pm i(\omega_0 + \omega)t}$  の項を無視することです。<sup>\*1</sup>



すると

$$\dot{c}_1 = \frac{i}{2} \chi^* e^{i\Delta t} c_2$$

$$\dot{c}_2 = \frac{i}{2} \chi e^{-i\Delta t} c_1$$

$$\chi = \frac{M_{21} E_0}{\hbar} : \text{Rabi 周波数}$$

$$\Delta = \omega - \omega_0 : \text{Detuning (離調)}$$



これらを纏めると

$$\frac{d^2 c_1}{dt^2} - i\Delta \frac{dc_1}{dt} + \frac{|\chi|^2}{4} c_1 = 0$$

となり、一般解は

$$c_1(t) = (A e^{i\Omega t/2} + B e^{-i\Omega t/2}) e^{i\Delta t/2}$$

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + |\chi|^2} : \text{一般化された Rabi 周波数}$$



\*1 あまりに素早く移動しすぎるから無視されたと考えればよろしい・・・のかな。



となります。少し整理しますと

$$c_2(t) = \frac{-i2}{\chi^*} e^{i\Delta t} \dot{c}_1(t) = \left[ \frac{\Delta + \Omega}{\chi^*} A e^{i\Omega t/2} + \frac{\Delta - \Omega}{\chi^*} B e^{-i\Omega t/2} \right] e^{-i\Delta t/2}$$

となります。初期条件を

$t \leq 0$  で  $c_2(t) = 1$ ,  $c_1(t) = 0$  とすると

$A = -B = \frac{\chi^*}{2\Omega}$  になります。これについていけば・・・



$$c_1(t) = i \frac{\chi^*}{\Omega} e^{i\Delta t/2} \sin \frac{\Omega}{2} t$$

$$c_2(t) = e^{i\Delta t/2} \left[ \cos \frac{\Omega}{2} t + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega}{2} t \right]$$

以上より、時刻  $t$  で下準位に居る確率は

$$|c_1(t)|^2 = \frac{\chi^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega}{2} t$$

この式の形からわかるとおり、コヒーレントな相互作用をしている間は  $\omega < \omega_0$  でも遷移は起きている。

さらに双極子モーメントの期待値も求めましょう。量子力学でおなじみですね。



$$\langle M \rangle = \langle \Psi | M | \Psi \rangle = \langle \Psi | (-er) | \Psi \rangle$$

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= c_1^* c_2 e^{i\omega_0 t} M_{12} + c.c. = -\frac{\chi M_{12}}{8\Omega} e^{-i\omega t} \left[ \left(1 + \frac{\Delta}{\Omega}\right) e^{i\Omega t} - \left(1 - \frac{\Delta}{\Omega}\right) e^{-i\Omega t} - \frac{2\Delta}{\Omega} \right] + c.c. \\ &= -\frac{i\chi M_{12}}{2\Omega} e^{-i\omega t} \left[ \sin \omega t - i \frac{\Delta}{\Omega} (1 - \cos \Omega t) \right] + c.c. \end{aligned}$$



このポイントは  $\omega$  で振動していることです。また、 $\omega = \omega_0$  の時

$$\langle M \rangle = -M_{12} \sin |\chi| t \sin \omega_0 t$$

$\omega_0$  の振動に  $\sin |\chi| t$  の振幅変調が掛かっていますね。



演習：水素原子の  $1s, 2p$  軌道での遷移

$I = 1W/cm^2$  の時の  $|\chi| = \frac{|ME|}{\hbar}$  を求めよ。

ようは  $I$  に対応するような  $E_0$  を求めて計算しろってことじゃ。

## 8 輻射場と2準位系の相互作用（半古典論）-遷移確率



Rabi さんに従った系での遷移確率も求めましょう。

$$|c_1(t)|^2 = |\chi|^2 \frac{\sin^2 \frac{\Omega}{2} t}{\Omega^2}, \quad \Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + |\chi|^2}$$

分極の影響が十分弱い極限  $\chi = \frac{M_{12} E_0}{\hbar} \rightarrow 0$  を考えると

$$|c_1(t)|^2 = |\chi|^2 \frac{\sin^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{2} t}{(\omega - \omega_0)^2}$$

実際には出力光は  $\omega_0$  は幅（分布） $\rho(\omega)$  を持っているのを考慮に入れて。

$$\int |c_1(t, \omega)|^2 \rho(\omega) d\omega = \int \left| \frac{M_{21} E_0}{\hbar} \right|^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)}{(\omega - \omega_0)^2} \rho(\omega) d\omega$$

$t \rightarrow \infty$  の場合

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)}{(\omega - \omega_0)^2} \rightarrow \frac{\pi}{2} t \delta(\omega - \omega_0)$$

故にフェルミの黄金則が求められて

$$\int |c_1(t, \omega)|^2 \rho(\omega) d\omega = \left| \frac{M_{21} E_0}{\hbar} \right|^2 \rho(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} t |_{\omega \sim \omega_0}$$

遷移確率は

$$\frac{d}{dt} \int |c_1(t, \omega)|^2 \rho(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \left| \frac{M_{21} E_0}{\hbar} \right|^2 \rho(\omega) |_{\omega \sim \omega_0}$$

電磁波のエネルギー密度は

$$W(\omega) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E_0(\omega)|^2 \text{ を用いると}$$

$\rho(\omega_0) = 1$  として

$$\frac{d}{dt} \int |c_1(t, \omega)|^2 \rho(\omega) d\omega = \frac{\pi |M_{21}|^2}{\hbar^2 \epsilon_0} W(\omega)$$

前回扱った遷移確率  $p(1 \rightarrow 2) = B_{12} W(\omega)$  を用いましょう。ここから B 係数を考えれば

$$B_{21} W(\omega) = \frac{\pi |M_{21}|^2}{\hbar^2 \epsilon_0} W(\omega)$$

$$B_{21} = \frac{\pi |M_{21}|^2}{\hbar^2 \epsilon_0}$$

となります。さて、もうちょっと一般論を考えてみましょう。

ランダムに配向した原子気体では

$\int d\Omega \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$  より、双極モーメント  $|p|^2$  に  $1/3$  をかけ

$$B_{21} = \frac{\pi |M_{21}|^2}{3 \hbar^2 \epsilon_0}$$

また、係数の関係

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \text{ を用いれば}$$

$$A_{21} = \frac{|M_{21}|^2 \omega_0^3}{3 \pi \hbar^2 \epsilon_0 c^3}$$

縮退を考慮に入れれば

$$A_{21} = \frac{|M_{21}|^2 \omega_0^3}{3 \pi \hbar^2 \epsilon_0 c^3} \frac{g_1}{g_2}$$

です。さて、ここまで求めたからには、オーダーくらいは考えておきましょう。

再び水素原子の 2p と 1s を例にとると

$$\hbar \omega_{2p \rightarrow 1s} = 13.6 \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) = 10.2 [\text{eV}]$$

$$A \sim 6 \times 10^8 [\text{s}^{-1}] (g_{2p} = 3)$$

となっています。これから不確定性関係\*2を用いると

$$\Delta U = (1/A)^{-1} \sim 6 \times 10^8 [\text{Hz}]$$

\*2  $\Delta x \Delta p \sim 1$  から単位系で戦えば解りそうじゃな。

## 9 分極の期待値から求める遷移確率



$dt$  の間に分極の影響で得られるエネルギーは

$\vec{E} \cdot \frac{d}{dt} \vec{P}$  となります。

$$E = E_{ab} \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad P = \epsilon \lambda E_{ab} \epsilon_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

を用いると

$$E \frac{dP}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right) \omega \epsilon_0 \lambda'' |E_{ab}|^2 \text{ と求められます。}$$



同様に、電磁気からエネルギーはポインティングベクトルは

$$E \times H = \left(\frac{1}{2}\right) c \epsilon_0 |E_{ab}|^2 \equiv I(\omega)$$

( $E, H$  の関係はグリモワ参照)



同様に、電磁気からエネルギーはポインティングベクトルは

$$E \times H = \left(\frac{1}{2}\right) c \epsilon_0 |E_{ab}|^2 \equiv I(\omega)$$

( $E, H$  の関係はグリモワ参照)。これは十分鋭いものとする(実際にフェルミの黄金則を見ての通り)ここから

$$E \frac{dP}{dt} = \omega \lambda'' \frac{I(\omega)}{c} \text{ が求められます。}$$

具体的な  $\lambda$  は光プロット、通常緩和の二つの方法で求めますよ。



なお、 $\lambda''$  は以下ようになっており、 $g(\omega)$  は  $I(\omega)$  より緩やかとしています。

$$\lambda'' = N \frac{\gamma}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{|p_{ba}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \equiv N \frac{|p_{ba}|^2 \pi}{\epsilon_0 \hbar} g(\omega)$$

こうして、得られる毎秒得られるエネルギーの期待値が出ます。これを  $N \hbar \omega$  で割れば確率になりますね。

$$B = \frac{\pi |p_{ba}|^2}{\epsilon \hbar^2} \text{ となります。}$$

## 10 緩和



「緩和」の項は基本的に何らかの物理量の時間の微分方程式に仕込まれます。得てして

$$\dot{a} = -\frac{1}{T} a + \text{【その他】}$$

の形で書かれます。【その他】の部分が 0 になれば  $a$  は

$$a(t) = a(0) e^{-t/T}$$

の形になり、確かに緩和しているといえるわけです。



『原子間の衝突、熱浴との相互作用によって、分極や粒子の数は緩和する』

この事象を現象論的に取り入れることを考えましょう。密度行列の時間発展式に緩和を加えた式

$$\dot{\rho}_{nm} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]_{nm} - \gamma_{nm} (\rho_{nm} - \rho_{nm}^{eq})$$

を考えます。収束先  $\rho_{nm}^{eq}$  から離れているほど引く力が働くと直感的に捉えることが出来ましょう。収束時間は  $\gamma_{nm}^{-1}$  のオーダーになります。



$$\rho_{22} - \rho_{11} = \Delta\rho \text{ として}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -(i\omega_{21} + \frac{1}{T_2})\rho_{21} + \frac{i}{\hbar}V_{21}\Delta\rho$$

$$\Delta\dot{\rho} = -\frac{1}{T_1}(\Delta\rho - \Delta\rho^{eq}) - \frac{2i}{\hbar}(V_{21}\rho_{12} - V_{12}\rho_{21})$$

$T_1$  は緩和時間で、現象論的に決めます。例えば、観測で得られた自然放出で落ちてくる時間などを入れるわけです。 $\gamma$  との関係も、例えば状態 2 から放出する場合は  $\gamma_{22} = \frac{1}{T_1}$  となるわけです。 $T_1$  は粒子の放出に掛かる時間ですね。



具体例を解いてみましょう。 $t < 0$  で  $H_I$  が存在し、 $t = 0$  から先が 0 だとすると

$$\Delta\rho(t) = \Delta\rho^{eq} + (\Delta\rho(0) - \Delta\rho^{eq})e^{-t/T_1}$$

$$\rho_{21}(t) = \rho_{21}(0)e^{i\omega_{21}t}e^{-t/T_2}$$

$$\langle \mu \rangle = \mu_{21}\rho_{12}(t) + \mu_{12}\rho_{21}(t) = (\mu_{12}\rho_{21}(0)e^{-i\omega_{21}t} + c.c.)e^{-t/T_2}$$

となります。 $V$  の意味とかを頑張って思い出しましょう。これ、なんとなく試験に出そうですね。



核磁気共鳴などに使われるようです。後で Bloch 方程式を扱うと解るのですが

$T_1$  : 縦緩和

$T_2$  : 横緩和 (位相緩和)

と呼ばれています。ちなみに

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \gamma_\phi$$

を満たしています。 $\gamma$  は純位相緩和と呼ばれています。

## 11 緩和時間の意味の再考察



緩和を含んだ係数を以下のように書けるとします。

$$|C_2(t)|^2 = |C_2(0)|e^{-t/T_1}$$

$$C_2(t) = C_2(0)e^{-t/2T_1}e^{-i\omega E_2 t/\hbar}$$

$$C_1(t) = C_1(0)e^{-i\omega E_1 t/\hbar}$$



ここから

$$C_2^*(t)C_1(t) = C_2^*(0)C_1(0)e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar}e^{-t/2T_1}$$

が求められ、この exp 部分が  $T_2$  に対応します。ので、こうなります。



緩和を入れた係数を  $a$  に押し込み、緩和の効果があっても分極に影響しないことを示します。

$$|\psi_s\rangle = a_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle + a_2 e^{-iE_2 t/\hbar} e^{-i\phi}|2\rangle$$

$a_1, a_2$  は実数のようです。 $\phi$  はランダムな位相のずれです

$$\rho_s = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 e^{i\phi} e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} \\ c.c. & a_2^2 \end{bmatrix}$$



ずれを完全にランダムとして平均を取ってしまえば

$$\rho = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \rho_s = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

これらの式から以下のことがいえます。・ $T_2$  はトータルで分極が亡くなるのに掛かる時間 ( $a$  が小さくなる)



- ・位相がランダムになって乱れるか、励起状態が居なくなると分極がいなくなる
- ・位相が十分ランダムになってしまうのに掛かる時間が純緩和時間 ( $T_1$ )

$$(\Delta\rho(t) = \Delta\rho^{eq} + (\Delta\rho(0) - \Delta\rho^{eq})e^{-t/T_1} \text{ より})$$

## 12 光ブロッホを使わない緩和項の扱い



面白いネタは何一つありません。2準位系、双極子モーメントの問題について

$$E = E^\omega \exp[-i(\omega t - kz)] + E^{\omega*} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$\rho_{ab} = \rho_{ab}^\omega e^{i\omega t}$ 、 $\rho_{ba} = \rho_{ab}^{\omega*} e^{-i\omega t}$ 、 $\rho_{bb} = \rho_{bb}^\omega e^{i\omega t}$ 、 $\rho_{aa} = \rho_{aa}^\omega e^{i\omega t}$  と決めつけて時間発展。密度行列は本当に便利です。式は以下ようになります。



回転波近似を使います。ようは  $\exp[2i\omega t]$  がある項を消します。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{ab}^\omega}{\partial t} &= i(\Omega_0 - \omega)\rho_{ab}^\omega - \gamma\rho_{ab}^\omega + i\frac{p_{ab}E^{\omega*}e^{ikz}}{\hbar}(\rho_{bb}^\omega - \rho_{aa}^\omega) \\ \frac{\partial \rho_{aa}^\omega}{\partial t} &= -\Gamma\rho_{bb}^\omega - \frac{i}{\hbar}(-p_{ba}E^\omega e^{ikz}\rho_{ab}^\omega + p_{ab}E^{\omega*}e^{-ikz}\rho_{ab}^{\omega*}) \\ \frac{\partial \rho_{bb}^\omega}{\partial t} &= \Gamma\rho_{bb}^\omega - \frac{i}{\hbar}(p_{ba}E^\omega e^{ikz}\rho_{ab}^\omega - p_{ab}E^{\omega*}e^{-ikz}\rho_{ab}^{\omega*}) \\ \Omega_0 &\equiv \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \end{aligned}$$



定常状態を扱うために、左辺をすべて0とします。すると、 $\rho$  が求められ、その結果  $\lambda$  は

$$\begin{aligned} \lambda' &= N \frac{\Omega_0 - \omega}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{|p_{ba}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \\ \lambda'' &= N \frac{\gamma}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{|p_{ba}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \end{aligned}$$

## 13 光ブロッホ方程式の縦緩和と横緩和



$$\rho_x = \rho_{21} + \rho_{12} = 2\text{Re}(\rho_{21}) = 2\text{Re}(\rho_{12})$$

$$\rho_y = \frac{1}{i}(\rho_{21} - \rho_{12}) = 2\text{Im}(\rho_{21}) = -2\text{Im}(\rho_{12})$$

$$\rho_z = \rho_{22} - \rho_{11}$$

ブロッホ方程式です。覚えていますね。光ブロッホの各々の項はこいつを回転させたものです。



閉じた2準位系での光ブロッホ方程式を

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{1}{T_2}u + \Delta v - Im\chi^*\omega \\ \dot{v} &= -\Delta u - \frac{1}{T_2}v + Re\chi^*\omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{T_1}(\omega - \omega(eq)) + Im\chi^*u - Re\chi^*v\end{aligned}$$

と式を書き直し、緩和を取り入れます。



縦緩和、横緩和の意味を考えましょう。縦緩和  $T_1$  は  $\rho$  の  $z$  成分を  $-1$  に向かわせるパラメータ。横緩和  $T_2$  は  $\rho$  の  $x, y$  成分を  $0$  に向かわせていくパラメータです。ようは全て基底状態に落ち着くわけですね。さて、一応上記の連立方程式から、定常状態を探してみましょう。



$T_2^{-1} = \gamma, T_1^{-1} = \Gamma$  として、連立方程式

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{T_2}u + \Delta v - Im\chi^*\omega \\ 0 &= -\Delta u - \frac{1}{T_2}v + Re\chi^*\omega \\ 0 &= -\frac{1}{T_1}(\omega - \omega(eq)) + Im\chi^*u - Re\chi^*v\end{aligned}$$

を解けば良いです。



$$\begin{aligned}u + iv &= \frac{\chi^*\omega}{\Delta - i\gamma} \\ \omega &= \omega(eq) \frac{1 + \Delta^2/\gamma^2}{1 + \Delta^2/\gamma^2 + |\chi|^2/\gamma\Gamma}\end{aligned}$$

これを、我々が観測できる形にまで戻しましょう。まずは元の密度行列になおすと



$$(u + iv)e^{i\omega t} = 2\rho_{12}$$

$$(u - iv)e^{-i\omega t} = 2\rho_{21}$$

となります。よって、得られる分極は原子密度を  $N$  とすれば

$$NTr(\rho\mu) = N(\rho_{12}\mu_{21} + \rho_{21}\mu_{12}) = \frac{1}{2} \frac{N|\mu_{12}|^2\omega}{\hbar} \left[ \frac{1}{\Delta + i\gamma} E_0 e^{-i\omega t} + c.c. \right]$$

以上より、分極を

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{1}{2}(P_0 e^{-i\omega t} + c.c.) \text{ として} \\ P_0 &= \frac{1}{2} \frac{N|\mu_{12}|^2\omega}{\hbar} \frac{1}{\Delta + i\gamma} E_0 = \chi E_0 \text{ と感受率を定義すると} \\ \chi &= \frac{N|\mu_{12}|^2}{\hbar\gamma} (\Delta - i\gamma) \frac{\omega(eq)}{1 + \Delta^2/\gamma^2 + |\chi_R|^2/\gamma\Gamma}\end{aligned}$$

$\chi_R$  の  $R$  は Rabi 周波数の  $R$  です。また  $\chi_R/\gamma\Gamma \ll 1$  の時



$$\omega = \omega(eq) \frac{1 + \Delta^2/\gamma^2}{1 + \Delta^2/\gamma^2 + |\chi|^2/\gamma\Gamma} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \omega(eq) \\ \chi &= \frac{N|\mu_{12}|^2}{\hbar} \frac{1}{\Delta + i\gamma} \omega(eq)\end{aligned}$$

さらに、 $k_B T \ll E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$  の時、 $\omega(eq) = -1$  となることから

$$\chi = \frac{N|\mu_{12}|^2}{\hbar} \frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma} \text{ となります。落ち着いて動きを見れば、} P \text{ は古典調和振動子に見えることが解るでしょう。}$$

## 14 飽和広がり と 飽和強度

さて、 $\chi$  の求め方がわかったところで、飽和という現象を扱って見ましょう。まずは、以下のような値を考えます。



$$|\frac{\mu_{12} E_s}{\hbar}|^2 = \gamma \Gamma \text{ (この値を飽和強度と呼ぶ)}$$

以上から  $E_s$  は以下のように表せます。

$$|E_s|^2 = \frac{\hbar^2 \gamma \Gamma}{|\mu_{12}|^2}$$

$$\chi = \frac{N |\mu_{12}|^2 (\Delta - i\gamma)}{\hbar \gamma^2} \frac{\omega(eq)}{1 + \Delta^2 / \gamma^2 + |E|^2 / |E_s|^2}$$

これらを用いると、 $E$  が  $E_s$  に差し掛かるところを閾値に  $\chi$  の虚部が落ちることが解ります。



また、パワー強度を

$$P = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E|^2 \text{ と定義すると}$$

$$P_s = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\hbar \gamma \Gamma}{|\mu_{12}|^2}$$

となります。

## 15 レーザーの物理 1 : 発振をしよう



何を隠そう、場所をよく考えておかないといけませんね。どうすれば読みやすくなるでしょう。いくつかを例題にするか？



これもやることは Super シンプル！ Maxwell 方程式に以下の形の  $\vec{E}, \vec{P}$  を入れるだけ

$$E = [E^\omega(t) e^{-i\omega t} + E^{\omega*}(t) e^{i\omega t}] \sin k_m z$$

$$P = [P^\omega(t) e^{-i\omega t} + P^{\omega*}(t) e^{i\omega t}] \sin k_m z$$

$$E^{(\omega)}(t) = |E^\omega(t)| e^{i\phi(t)}$$



結果はまあ、計算すれば出る通りで

$$\frac{d|E^\omega|}{dt} + (\kappa + \frac{\omega}{2} \lambda'') |E^\omega| = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \omega_m - \omega - \frac{\omega}{2} \lambda' = 0$$

$$\kappa \equiv \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



また、先ほどの緩和の問題と同じように、与えられた  $E$  を代入して  $\rho$  を求めると

$$\rho_{ba}^\omega = \frac{-(\Omega_0 - \omega + i\gamma) \frac{P_{ba} E^\omega}{\hbar} \sin k_m z}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{2P_{ba} E^\omega}{\hbar} \sin^2 k_m z}$$

となる。この密度行列からも  $P$  を求めることができますね。



さて、こうして求められる  $P$  は

$$P = p_{ab}\rho_{ba}^\omega e^{-i\omega t} + p_{ba}\rho_{ba}^{\omega*} e^{i\omega t}$$

の形になっているので  $P^\omega$  が求められているわけではないのです。仕方ないのでフーリエ成分をとります。



計算は割愛しますが、結果は

$$P^\omega = N \frac{-(\Omega_0 - \omega + i\gamma) \frac{p_{ba} E^\omega}{\hbar}}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\hbar} |2p_{ba} E^\omega|^2} (\rho_{bb} - \rho_{aa})_0$$

( $(\rho_{bb} - \rho_{aa})_0$  は系が最終的に収束した時の密度。

となります。これと先ほど求めた式から更に  $\kappa$  と  $\lambda$  の関係式が立ちます。具体的には



$$\kappa = \frac{\omega}{2} \frac{\gamma}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{|p_{ba}|^2}{\epsilon_0 \hbar} \{N(\rho_{bb} - \rho_{aa})_0\} (E = 0)$$

これより、 $N(\rho_{bb} - \rho_{aa})_0 \equiv \Delta N_{th}$  が

$$\Delta N_{th} = \frac{(\Omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}{\gamma} \frac{2\kappa \epsilon_0 \hbar}{\omega |p_{ba}|^2}$$

が発振のしきい値と解る。(  $E > 0$  となるためには  $\Delta N_{th}$  はさらに大きい必要がある )



さらに、 $E$  についてまとめると

$$|E^\omega|^2 = \frac{\Gamma \hbar \omega}{6\kappa \epsilon_0} (\Delta N_0 - \Delta N_{th})$$

となり、しきいを超えた分だけ光が出ることが解る。

## 16 レーザーの物理 2 : 非線形光学からの位相整合



今まで散々解いてきたように、 $P$  の大きさは分極に依存し、また分極は屈折率に影響を及ぼします。今までは  $c^2 \epsilon \mu = n^2$  としてきましたが、非線形光学に拡張してしまうと、話はそうシンプルにはいかなくなります。とはいえ、身構える必要はありません。式を解くのに都合のよいように整理するだけなので。

先立って分極の係数の定義をしましょう。

$$P = P_1^L + P_2^{NL} + P_2^L + P_3^{NL} + \dots$$



$P_k^L (k > 1)$  は上記のテンソルの効果以外で出てきた分極です。例えば発生した二次の光に対する線形応答です。そして、屈折率を以下のように書きなおします。

$$n_k^2 \equiv c^2 (\epsilon_0 \mu (1 + \frac{P_k^L}{\epsilon_0}))$$

今までの屈折率が線形応答の大きさから求められていたことを考えると、納得がいきますね。

すると、 $z$  方向に進む電場の二次の非線形応答について以下の式が立てられます。摂動のように各次の応答に関連するもののみで微分方程式を立てているということを忘れないでください。



$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{n_1^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} - \frac{n_2^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_2^{NL}}{\partial t^2}$$

さて、この  $E_2$  はどう考えても  $2\omega$  の振動数を持ちそうですが、敢えて  $\omega_2$  と自由に値をとれるようにして、この微分方程式を解こうとしてみましよう。

$E_2, P_2$  の定義

$$E_2 = E^{\omega_2}(t, z) \exp[-i(\omega_2 t - k_2 z)] + c.c$$

$$P_2^{NL} = P^{2\omega}(t, z) \exp[-i(2\omega t - 2k_1 z)] + c.c$$

$E^{\omega_2}(t), P^{2\omega}(t)$  の 2 階微分は 1 階微分に比べて十分小さいとすると

$$ik_2 \frac{\partial E^{\omega_2}}{\partial z} + \frac{n_2}{c^2} \times i\omega_2 \frac{\partial E^{\omega_2}}{\partial t} = -\mu_0 \times 4\omega P^{2\omega} \exp[-i(k_2 - 2k_1)z]$$

$\Delta k \equiv (k_2 - 2k_1)$  (上の式は  $\exp[i(\omega) \cdot \cdot]$  の項を  $z$  に依存しないので消している)

さらに、定常状態を仮定して  $E^{\omega_2}$  の時間微分を 0 とすれば

$$\frac{\partial E^{\omega_2}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_2 c} P^{2\omega} e^{-i\Delta k z}$$

ここから、 $\Delta k \rightarrow 0$  の場合が最も  $z$  方向へ  $E$  が大きくなるのが解り、位相整合条件が見える。こうして大きくなった  $E_2$  がレーザーの場合、波長を変えて発信された光となる。 $z$  方向への伸びの関係からレーザーが長いほうが威力が出る理由が解る

なお、 $\Delta k = 0$  は  $\omega_2 = 2\omega$  を意味するわけではありません。なぜなら  $\omega$  が異なれば、屈折率  $n$  が異なるからです。 $P_2^{NL}$  は  $E^\omega$  で作られているので光としての屈折率は  $n_1$  です。

$k$  と屈折率の関係より  $2n_1\omega = n_2\omega_2$  が求められたにすぎません。

よって、2倍の高調波を出すにはちょっとした工夫が必要です。例えば、結晶は格子に平行か垂直かによって二つの屈折率を持ちます。結晶を回転させることで二つの屈折率を複合した(楕円を書き中心からの距離で求められるらしい)屈折率を用いることで、二つの屈折率を合致させることができます。

## 17 パラメトリック増幅

$$\frac{\partial E^{\omega_2}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_2 c} P^{2\omega} e^{-i\Delta k z}$$

の応用で、高い  $\omega$  の入射光を小さい  $\omega$  に分解する技法があります。具体的には強い  $\omega_3$  と摂動項の  $\omega_1$  を加えます。

$$\frac{\partial E^{\omega_1}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_1 c} P^{\omega_1} E^{\omega_3} E^{\omega_2*} e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{\partial E^{\omega_2}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_2 c} P^{\omega_2} E^{\omega_3} E^{\omega_1*} e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{\partial E^{\omega_3}}{\partial z} = \frac{i\omega_2}{2\epsilon_0 n_3 c} P^{\omega_3} E^{\omega_1} E^{\omega_2} e^{-i\Delta k z} \quad \omega_2 \equiv \omega_3 - \omega_1, \quad \Delta k \equiv k_3 - k_2 - k_1$$

強い光なので  $E^{\omega_3} = |E_3| e^{i\phi_3} = \text{const}$  とし、さらに位相整合  $\Delta k = 0$  を仮定すると

$$E^{\omega_1}(z) = E^{\omega_1}(0) \cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + ie^{i\phi_3} \sqrt{\frac{n_2\omega_1}{n_1\omega_2}} E^{\omega_2*}(0) \sinh\left(\frac{gz}{2}\right)$$

$$E^{\omega_2}(z) = E^{\omega_2}(0) \cosh\left(\frac{gz}{2}\right) + ie^{i\phi_3} \sqrt{\frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1}} E^{\omega_1*}(0) \sinh\left(\frac{gz}{2}\right)$$

となります。まあ、見ればわかるとおり増幅されていくわけですね。

また、特殊な形として  $\omega_1 = \omega_2$  で  $E_{\omega_1} = |E_1| e^{i\phi_1}, \phi_3 - 2\phi_1 = \pm\pi/2$  としたとき

$$|E^{\omega_1}(z)| = |E^{\omega_1}(0)| \exp(\pm \frac{gz}{2})$$

となり、増幅器、減衰器としてふるまえることが解ります。

## 18 非線形分光



2準位だったところを3準位にして、ひたすら密度行列の方程式を追いかければ解の形が見えてきます。まあ、がんばってください。

## 19 量子化された場と光

まずは相互作用のハミルトニアンを簡単な形に書き直しましょう。



$$H_I = - \sum_{\alpha} \frac{e}{m_{\alpha}} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\alpha})$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\alpha} &= i \frac{m}{\hbar} [H, \vec{r}_{\alpha}] = \sum_i |i\rangle \langle i| i \frac{m}{\hbar} [H, \vec{r}_{\alpha}] \sum_m |m\rangle \langle m| \\ &= i \frac{m}{\hbar} \sum_i |i\rangle \langle i| (E_i \vec{r}_{\alpha} - \sum_m E_m \vec{r}_{\alpha}) \sum_m |m\rangle \langle m| \\ &= -i \frac{m}{e} \sum_{i,m} \frac{E_i - E_m}{\hbar} \vec{P}_{im} |i\rangle \langle m| \end{aligned}$$

$$(\vec{P}_{im} = \sum_{\alpha} \langle i| (-e) \vec{r}_{\alpha} |m\rangle)$$

これらを用いて、双極子近似の元で

$$H_I = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} (a + a^+) \sum_{i,m} \omega_{im} \vec{e} \cdot \vec{P}_{im} |i\rangle \langle m| \quad (3.123)$$

式準位系： $|b\rangle, |a\rangle$  を仮定して  $\omega_{ba} = -\omega_{ab} \sim \omega$  とする。さらに  $\vec{e} \cdot \vec{P}_{im} = P_{im} = P_{ab}$  として



$$H_i = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} (a + a^+) (P_{ba} |b\rangle \langle a| - P_{ab} |a\rangle \langle b|)$$

$$g = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} P_{ba} \text{ を用いれば}$$

$$H_I = (a + a^+) (g |b\rangle \langle a| + g^* |a\rangle \langle b|) \quad (3.124)$$

回転波近似（というかありえなさそうな反応を消した？）を用いれば

$$H_I = ga |b\rangle \langle a| + g^* a^+ |a\rangle \langle b| \quad (3.125)$$



混乱したから書いておきますが  $a$  は原子の電子軌道  $|a\rangle, |b\rangle$  のエネルギー差に対応するエネルギーを持つ「光子」を生成したり消滅させたりする演算子です。 $|a\rangle, |b\rangle$  は電子の軌道です。 $|a, N+1\rangle$  は電子軌道  $a$ 、光子が  $N+1$  個を意味します。

## 20 Dressed State ( 着衣の状態 )



此処から量子的な光学を扱いますが、先の一つお断り。 $\langle n | \hat{E} | n \rangle = 0$  となるのは、振幅が0だからではなく、存在しうる  $E$  の位相がランダムで打ち消しあうからと理解しましょう。その証拠に  $\langle n | E^2 | n \rangle$  は0にはなりません。また、ここから場の揺らぎを議論することが可能です。

ハミルトニアンは  $H = H_p + H_L + H_I$  とかけるわけですが、これらを先ほどまでで求めた形に直します。どうやら 2 準位系のようにです。



$$H_p + H_L = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}) + E_b|b\rangle\langle b| + E_a|a\rangle\langle a|$$

$$H_I = ga|b\rangle\langle a| + g^*a^+|a\rangle\langle b|$$

$$E_b - E_a = \hbar\omega_0$$

$H$  の固有状態を  $|a, N+1\rangle$ 、 $|b, N\rangle$  で展開すると



$$H_{(N)} = \begin{bmatrix} (N+1)\hbar\omega & 0 \\ 0 & N\hbar\omega + \hbar\omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g^*\sqrt{N+1} \\ g\sqrt{N+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

$|b\rangle$ -----

h 0

$|a\rangle$ -----

$|a, N+2\rangle$

$|b, N+1\rangle$

$|a, N+1\rangle$

$|b, N\rangle$

h 0

$|a, N\rangle$

$|b, N-1\rangle$

a から a、b からは h

$H_{(N)}$  を対角化すると

$$H_{(N)} = \begin{bmatrix} E_{1N} & 0 \\ 0 & E_{2N} \end{bmatrix}$$

$$E_{1N} = N\hbar\omega + \frac{1}{2}(\hbar\omega + \hbar\omega_0) + \frac{1}{2}\hbar\Omega'_R$$

$$E_{2N} = N\hbar\omega + \frac{1}{2}(\hbar\omega + \hbar\omega_0) - \frac{1}{2}\hbar\Omega'_R$$

$$\Omega'_R = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}$$

$$\Omega_R = \frac{2|g|(N+1)}{\hbar} \text{ ( Rabi 周波数 )}$$

$$\Delta = \omega - \omega_0$$



固有状態は

$$|1(N)\rangle = \sin\theta|a, N+1\rangle + \cos\theta|b, N\rangle$$

$$|2(N)\rangle = \cos\theta|a, N+1\rangle + \sin\theta|b, N\rangle$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\Omega_R}{\Delta}$$

$$\sin\theta = \frac{\Omega_R}{\sqrt{(\Omega'_R - \Delta)^2 + \Omega_R^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\Omega'_R - \Delta}{\sqrt{(\Omega'_R - \Delta)^2 + \Omega_R^2}}$$

$$E_{1N} = N\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega_0 + \frac{1}{2}\Omega'_R$$

$$E_{2N} = N\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\Omega'_R$$

教授の研究ネタをここで披露。五神教授のネタも含まれていて面白い。

お次は確率振幅を求めます。

Bare State による分解

$$|\Psi\rangle = \sum_n (C_{aN+1}(t)|a, N+1\rangle + C_{bN}(t)|b, N\rangle)$$

Dressed State による分解

$$|\Psi\rangle = \sum_n (C_{1N}(t)|1(N)\rangle + C_{2N}(t)|2(N)\rangle)$$

両者とも同じ状態を違う基底で分解しようとしています。これを行列にしようと企みます。

その前に下準備として

$$T \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

を定義します。こいつらを利用すれば

$$\begin{bmatrix} C_{2N}(t) \\ C_{1N}(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} C_{bN}(t) \\ C_{aN+1}(t) \end{bmatrix}$$

となります。さらに次は、前回やったのと同じく、相互作用表示にしようとしてみます。

$$|\Psi(t)\rangle_S = \exp(-i\frac{H}{\hbar}t)|\Psi(0)\rangle_S$$

Dressed State で展開すれば

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \exp(-i\frac{E_j}{\hbar}t)|j(N)\rangle \langle j(N)|\Psi_0\rangle_S$$

これを相互作用表示にして

$$|\Psi(t)\rangle_I = \exp[i((N + \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0)/\hbar]|\Psi(t)\rangle_S$$

と考えると (3-135-137)

$$\begin{bmatrix} C_{2N}(t) \\ C_{1N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(i\Omega'_R t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega'_R t/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{2N}(0) \\ C_{1N}(0) \end{bmatrix}$$

こいつから楽々と

$$\begin{bmatrix} C_{bN}(t) \\ C_{aN+1}(t) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \exp(i\Omega'_R t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega'_R t/2) \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} C_{bN}(0) \\ C_{aN+1}(0) \end{bmatrix}$$

と求められます。



$\Delta = 0$  (共鳴) の場合

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\Omega_R t}{2} & i \sin \frac{\Omega_R t}{2} \\ -i \sin \frac{\Omega_R t}{2} & \cos \frac{\Omega_R t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{bN}(0) \\ C_{aN+1}(0) \end{bmatrix}$$

ここから漸く確率に直すことができますね。



$t = 0$  で  $C_{aN+1} = 0, C_{bN} = 1$  とした場合 (励起状態の場合)

$$|C_{bN}(t)|^2 = \cos^2 \frac{\Omega_R t}{2} = \cos^2 g\sqrt{N+1}t$$

$$|C_{aN+1}(t)|^2 = \sin^2 \frac{\Omega_R t}{2} = \sin^2 g\sqrt{N+1}t$$

となります。古典的な場合との差は  $g$  のあたりにあります。よく見てみましょう。



ちょっと他の例も見てみましょう。反転分布

$W = |C_{bN}(t)|^2 = |C_{aN+1}(t)|^2 = \cos 2g\sqrt{N+1}t$  を考えます。

光子分布:  $\rho_{nm}(0)$  を考えると ( $N \rightarrow n$  と書き換えます)

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) \cos 2g\sqrt{n+1}t$$

初期状態: 真空 ( $\rho_{nn}(0) = \delta_{n0}$ ) とすれば

$$W(t) = \cos 2gt : \text{VaccumRabiFlopping}$$


初期状態を変更して Coherent State にすると

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}, \langle n \rangle = |\alpha|^2 \text{ となり}$$

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \cos 2g\sqrt{n+1}t$$

$\langle n \rangle \gg 1$  ならあまり影響が出ません。ちょっと汚いなあ程度で終わりです。振動周期は

$$\tau_R \sim \frac{1}{\Omega_{R(\langle n \rangle)}} = \sim \frac{1}{2g\sqrt{\langle n \rangle}}$$


$\Omega_R$  の分布を見てみましょう。

$$g\sqrt{\langle n \rangle - \Delta n} \leq \Omega_R \leq g\sqrt{\langle n \rangle + \Delta n}$$

$$\Delta \Omega_R \sim g \frac{\delta n}{\sqrt{\langle n \rangle}} = g$$

となります。

Rabi 周波数は  $\tau_c \sim \frac{1}{g}$  で減衰。(3-145) この減衰の意味は大きいですよ!

しかし、所詮周波のずれたなみの打ち消しあいなので尋常じゃなく長い時間待てば復活しそうです。その復活に掛かる時間は

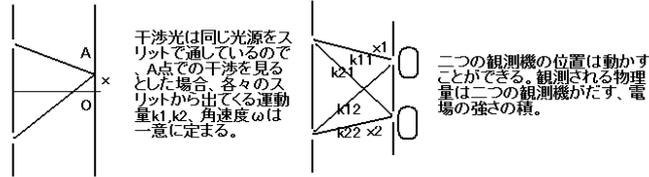
$$(\Omega_{R(\langle n \rangle)} - \Omega_{R(\langle n-1 \rangle)})\tau_R = 2\pi m \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\tau_R = \frac{2\pi m}{\Omega_{R(\langle n \rangle)} - \Omega_{R(\langle n-1 \rangle)}} \sim \frac{2\pi m \sqrt{\langle n \rangle}}{g} = 2\pi m \sqrt{\langle n \rangle} \tau_c$$

## 21 量子化された場の干渉



$E$  の演算子、 $B$  の演算子の表現方法と生成消滅演算子の使い方の基本を覚えておけば勝手に出てきます。



さて、干渉を扱うにあたり、 $\vec{r}$  の場所で光が吸収されたとすると、

吸収前： $|\phi_i\rangle |g\rangle$

吸収後： $|\phi_f\rangle |e_j\rangle$

エネルギー： $e\vec{r} \cdot \vec{E}$  遷移が起こる確率は摂動論より



$$\sum_{e_j} \sum_{\phi_f} \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle e_j | \langle \phi_f | e\vec{r} \cdot \vec{E} | \phi_i \rangle |g\rangle|^2 =$$

$$\sum_{e_j} \sum_{\phi_f} \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle e_j | e\vec{r} |g\rangle \langle \phi_f | \vec{E} | \phi_i \rangle|^2$$

比例係数は邪魔だから削ると

$$= \sum_{\phi_f} K |\langle \phi_f | \vec{E} | \phi_i \rangle|^2 = \sum_{\phi_f} K \langle \phi_i | \vec{E}^* | \phi_f \rangle \langle \phi_f | \vec{E} | \phi_i \rangle = \langle \phi_i | \hat{E}^* \hat{E} | \phi_i \rangle$$



となります。電場の演算子を決めつけば夜明けは近いですね。

$$\hat{E}^* = iE_0 [\hat{a}_A^+ e^{-i\vec{k}_A \cdot \vec{r}} + \hat{a}_B^+ e^{-i\vec{k}_B \cdot \vec{r}}]$$

$$\hat{E} = -iE_0 [\hat{a}_A e^{i\vec{k}_A \cdot \vec{r}} + \hat{a}_B e^{i\vec{k}_B \cdot \vec{r}}]$$

あとはこれを適当な固有状態で挟めば OK です。



計算はしておきましょうかね。

$$\hat{E}^* \hat{E} = E_0^2 (\hat{a}_A^+ \hat{a}_A + \hat{a}_B^+ \hat{a}_B + \hat{a}_A^+ \hat{a}_B e^{i(\vec{k}_B - \vec{k}_A) \cdot \vec{r}} + \hat{a}_B^+ \hat{a}_A e^{-i(\vec{k}_B - \vec{k}_A) \cdot \vec{r}})$$

さて、時間の位相差について考えておきたいところですが、干渉では同じ点光源などから光を取るの図の O で位相が合うようにすればよいわけです。つまり、 $\vec{r}$  は O を原点としたベクトルで考えればよいわけです。



$$\text{そうした場合、} (\vec{k}_B - \vec{k}_A) \cdot \vec{r} \sim \frac{2\pi x}{L}$$

となります。此処まで求められればもう問題ありませんね。

$|\phi_i\rangle$  を二つのスリットの重ね合わせ

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_A\rangle + |1_B\rangle)$$

とすると ( $|1\rangle_A = \hat{a}_A^+ |0\rangle$  と定義)



「遷移が起こる確率」 = 「光を吸収する確率」 ~ 「電場の強さの期待値」は

$$2E_0^2 K [1 + \cos(\frac{2\pi x}{L})]$$

となります。古典的な場合と似ていますが、こちらは「光子一つ」でこの干渉が成り立つことがポイントです。

量子的な現象がみたいという人のために発展問題も用意しましょう。右の図で観測したいのは



$$\begin{aligned} & \langle \phi_i | \hat{E}_1^* \hat{E}_1 \hat{E}_2^* \hat{E}_2 | \phi_i \rangle \\ \hat{E}_1^* &= iE_0 [\hat{a}_1^+ e^{-i\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_2^+ e^{-i\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}}] \\ \hat{E}_1 &= -iE_0 [\hat{a}_1 e^{i\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_2 e^{i\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}}] \\ \hat{E}_2^* &= iE_0 [\hat{a}_1^+ e^{-i\vec{k}_{21} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_2^+ e^{-i\vec{k}_{22} \cdot \vec{r}}] \\ \hat{E}_2 &= -iE_0 [\hat{a}_1 e^{i\vec{k}_{21} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_2 e^{i\vec{k}_{22} \cdot \vec{r}}] \end{aligned}$$

です。  $\vec{k}_{11}$  と  $\vec{k}_{21}$  は同じ波なので同じ演算子です。

つべこべ言わずに計算すれば



$$P \propto \{1 + \cos[\frac{2\pi(x_1 - x_2)}{L}]\}$$

が求められます。古典的な場合は

$$P \propto \{1 + \frac{1}{2} \cos[\frac{2\pi(x_1 - x_2)}{L}]\}$$

となりますが、量子的な場合のほうが正しいと実験から解っています。

## 22 量子化された場のコヒーレント状態



コヒーレント状態とは

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

となる状態のことを指します。まあ、この式を満たす  $|\alpha\rangle$  を求めたらひたすら  $E$  やら揺らぎやらを測定してみましょう。

具体的な形がそんなに複雑ではないのでとっとと書いて次へ行きましょう。上の式を満たすことは自力で確認してみてください。



$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ (光子が } n \text{ 個ある状態 } |n\rangle \text{ と消滅演算子の関係)}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ (光子が } n \text{ 個ある状態 } |n\rangle \text{ と消滅演算子の関係)}$$

上の2式は復習です。解らない場合は記事を読みなおしましょう。

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right)$$

$e^{-|\alpha|^2/2}$  は規格化のためのものです。さて、形が解ったので物理的な性質を議論しましょう。



電場の演算子は定数部分を削れば ( $z$  方向の波一つだけを考察)

$$\hat{E} = iE_0 \hat{a} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + ikz) - \hat{a}^+ \exp(i\omega_{\vec{k}} t - ikz)$$

となっていましたね。ちょっと楽をするために以下を定義します。

$$\hat{x}_1 \equiv \frac{1}{2}(\hat{a}^+ + \hat{a})$$

$$\hat{x}_2 \equiv \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

こうすることで、電場の演算子は

$$\hat{E} = 2E_0 [\hat{x}_1 \sin(\omega t - kz) + \hat{x}_2 \cos(\omega t - kz)]$$

となります。





さらに  $\alpha = x_1 + ix_2$  のように実数と複素数で分解すれば  
 $\langle \alpha | \hat{x}_1 | \alpha \rangle = x_1$ 、 $\langle \alpha | \hat{x}_2 | \alpha \rangle = x_2$   
 が求められます。(計算は気になるなら各自)



以上から各種物理量を求めていきましょう。  
 $\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = 2E_0 |\alpha| \sin(\omega t - kz - \theta)$   
 ただし  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$   
 $\langle \alpha | \hat{E}^2 | \alpha \rangle = E_0^2 (4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - kz - \theta) + 1)$   
 以上から  $\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = E_0$  が求められ、電場の揺らぎが解ります。



計算をだいぶ省略していますが、不確定性についても言及しましょう。  
 $[\hat{X}, \hat{Y}] = i\hbar$  を満たす物理量  $\hat{X}, \hat{Y}$  は不確定性  
 $\Delta \hat{X} \Delta \hat{Y} \geq \frac{\hbar}{2}$   
 を満たすというものです(導出は省略。)



今回使った演算子は計算すれば  
 $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = \frac{i}{2}$   
 が満たされることが解りますが、これをコヒーレント状態に適用しても  
 $\Delta x_1 \Delta x_2 = \frac{1}{4}$   
 となり、確かに不確定性を満たしてくれます。



さらに、光子の数  $n$  は  
 $\langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha^2$   
 で期待値が計算できます。同様に揺らぎも計算することが可能で計算すると  $\alpha$  になります。  
 また  $\alpha^2 = x_1^2 + x_2^2$  となることから  $\alpha$  の角度方向の不確定性は  $\alpha$  が大きくなるほど小さくなることを解ります。

## 23 スクイーズド状態



入射した光を演算子  $\hat{a}$  で評価するのに対し、でてくる光の演算子を  
 $\hat{b} = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^+ e^{i\phi} \sinh(r)$   
 を用いて評価しようとたくらんでいるだけです。



ちなみに  $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$  を満たし、電場は  
 $\hat{E}_{out} = iE_0 (\hat{b} e^{-i\omega t} - \hat{b}^+ e^{i\omega t})$   
 で書かれます。これを利用し様々な固有状態をみるだけです。揺らぎの性質が変わってきます。



コヒーレント状態について議論すれば  
 $\langle \alpha | \hat{b} | \alpha \rangle = \alpha \cosh(r) - \alpha^* e^{i\phi} \sinh(r)$   
 となります。此処まで解ればゴールはすぐです。



$\phi = 0$  の時  
 $\langle \alpha | \hat{b} | \alpha \rangle = x_1 e^{-r} + i x_2 e^r$   
 となることから  $\hat{b}$  が消滅演算子となるような光子の調和振動子の系で放出光を観測すれば



$\Delta x_{1'} = \frac{1}{2} e^r$   
 $\Delta x_{2'} = \frac{1}{2} e^{-r}$   
 のように、実部と虚部の揺らぎが変わります。この系での電場は  
 $2E_0 [\hat{x}_{1'} \sin(\omega t - kz) + \hat{x}_{2'} \cos(\omega t - kz)]$   
 となり、確かに観測される結果の揺らぎが変わります。

## 2

## Appendix

## 面倒な計算たち

しきたい4 (量子化 etc)

## 1 基本的統計力学の問題-光の放出と吸収



まず、1辺の長さ  $L (>> \lambda)$  の立方体を用意します。ベクトルポテンシャルを平面波とすれば  $\vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  です。

これに周期的境界条件加え、 $\vec{A}(t) = \vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_L}$  とします。

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (n \text{ は整数})$$



このとき  $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、 $|\vec{n}| = \frac{L}{\lambda} >> 1$

として、 $0 \sim |\vec{n}|$  に含まれているモードの数は  $\frac{4\pi n^3}{3} \times 2$  (2は縦波横波の自由度) ここまでは解りやすいですね。そして、これを  $\omega$  になおしましょう。



$$\omega = ck = \frac{2\pi c}{L}|\vec{n}|, \left(\frac{L\omega}{2\pi c}\right)^3 \frac{4\pi}{3} \times 2 = \frac{L^3}{3\pi^3 c^3} \omega^3$$

このとき、モード密度  $\omega \sim \omega + d\omega$  までに居るモードの数は

$$\frac{L^3}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

単位体積あたりにすれば

$$\frac{1}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \text{ です。}$$



さらに、エネルギー量子仮説

$U_n = n\hbar\omega$  を仮定してしまいます。すると平均エネルギーは

$$W = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-\beta n\hbar\omega}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (\text{周波数 } \omega \text{ の 1 モードが持つ平均エネルギー})$$



そして、全てのモードの平均を取ると

$$W_{th}d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega$$

そして、このピークのエネルギーが  $\hbar\omega = 2.8k_B T$  となります。



玉手箱を暗記していれば計算可能ですが、一応例を書いておくと

$$300K \text{ で } \lambda = 17[\mu m] (18THz)$$

$$2.7K \text{ で } \lambda = 1.9[mm] (160GHz)$$



極限を取ればレイリー-ジーンズさん  $\hbar \rightarrow 0$  で

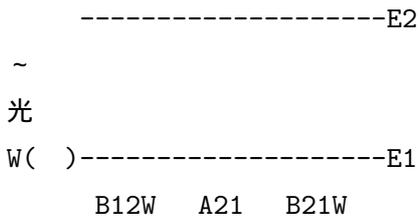
$$\sim \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T$$

ウィーンさん  $\hbar\omega \gg k_B T$  で

$$\sim \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} e^{-\beta\hbar\omega}$$

となります。統計物理などでおなじみですね？

## 2 光の放出と吸収-自然放出と誘導放出



上図のように自然な高い状態から低い状態への降下（自然放出）A と、光の誘導による励起と降下である  $B_{12}$  と  $B_{21}$  がいます。簡単な為に各々の状態の縮退は無いとしましょう。またエネルギーの関係を以下のようにします

$$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega$$



$$E_2 \rightarrow E_1$$

$$p(2 \rightarrow 1) = A_{21} + B_{21}W(\omega)$$

$$E_1 \rightarrow E_2$$

$$p(1 \rightarrow 2) = B_{12}W(\omega)$$



以上より、単位時間に原子が吸収するエネルギーは

$$P_{obs} = \hbar\omega B_{12}W(\omega)N_1 \quad (N_1 \text{ は } E_1 \text{ にいる粒子の数})$$

同様に上準位に居る原子が放出するエネルギーは

$$P_{emit} = \hbar\omega(A_{21} + B_{21}W(\omega))N_2$$

これらが温度  $T$  で熱平衡であるとすれば

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta\hbar\omega}$$

となっているはずですが。黒体輻射では、原子系と電磁場が熱平衡であると仮定してしまえば

$$P_{obs} = P_{emit} \text{ より}$$

$$W(\omega) = \frac{A_{21}}{e^{\beta\hbar\omega} B_{12} - B_{21}}$$

これをプランクの式と比較することで

$$B_{12} = B_{21}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

$$A = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B \equiv m(\omega)\hbar B$$

となります。A の形から全てのモードに対して自然放出が存在することが予想されてしまいます。





見れば解りますが  $\omega$  が大きければ自然放出確率が上がるわけですね。この  $A$  が憎たらしくもレーザー技術の邪魔をしてくれます。自然放出はレーザー生成には邪魔なわけですからね。エネルギーが大きい X 線レーザーなどは作るのが難しいわけです。新しい技術では発信機を小さくするなどの措置が取られているようです。詳しくは興味があったら調べましょう。

### 3 ランダウ式！ 光子の量子化と電磁場の演算子



上のフーリエさんと似たような気がします、私はこちらの方が好きだったりします。まずはベクトルポテンシャルを離散的なフーリエさんで展開します。

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} (\vec{c}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega_{\vec{k}} V}}$$

$\vec{A}$  が実数であることを利用しています。



さらに、この展開に以下のような条件を加えます。

$\vec{c}_{\vec{k}}$  は  $\vec{k}$  と垂直（真空の電磁場の性質より）  
 $\omega = v|k|$ （おなじみの関係。真空（今の系）では  $v = c$ ）  
 $\vec{c}_{\vec{k}}$  の時間依存性は  $e^{-i\omega t}$   
 スカラーポテンシャルは居ないゲージを扱う



さて、ベクトルポテンシャルを決め付けてしまえば、全エネルギーが

$$H = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

から求められます。マクスウェルに従えばどうってことはありません。書き直せば

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (P_{\vec{k}}^2 + \omega^2 Q_{\vec{k}}^2)$$

$$Q_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\vec{c}_{\vec{k}} + \vec{c}_{\vec{k}}^*)$$

$$P_{\vec{k}} = -\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (\vec{c}_{\vec{k}} - \vec{c}_{\vec{k}}^*) = \dot{Q}_{\vec{k}}$$

となります。このかたち、なにかドキドキしませんか？



そう、調和振動子にそっくりでしょう。これは「真空の電磁場を光子の調和振動子の重ねあわせとした場合、 $Q, P$  は光子の座標、運動量とすることが出来る」ということです。さて、もうちょっとこの式を分解してしっかりと調和振動子にしましょう。

$\vec{c}_{\vec{k}}$  を  $\vec{c}_{k,1}, \vec{c}_{k,2}$  の線形結合としましょう。この二つのベクトルは  $\vec{k}$  に垂直で  $\vec{k}$  が定まれば一意に決まる、互いに直交なベクトルとしましょう。



すると、

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} (P_{\vec{k}, \sigma}^2 + \omega^2 Q_{\vec{k}, \sigma}^2)$$

と書き直せます。  $P_{\vec{k}, \sigma}, Q_{\vec{k}, \sigma}$  は平行なので、今度こそ 1 次元の調和振動子の重ね合わせにできます。次元調和振動子だと決め付ければ、古典論から量子論への拡張は  $[P_{\vec{k}, \sigma}, Q_{\vec{k}, \sigma}] = -i\hbar$  とするのが自然であるとわかります。



交換関係も決め付けてしまったので、あとは調和振動子の式を解いてしまえばおしまいです。なにやら手順がごちゃごちゃしてますが、ようは、調和振動子の重ねあわせであると決め付けて、光子の運動量、座標、交換関係を決め付けただけです。

$$\text{エネルギー} : \sum_{\vec{k}, \sigma} (N_{\vec{k}, \sigma} + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$



$$\text{消滅演算子} : \hat{c}_{\vec{k}, \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{\vec{k}, \sigma} + i \hat{P}_{\vec{k}, \sigma}) = \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}$$

$$\text{生成演算子} : \hat{c}_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega \hat{Q}_{\vec{k}, \sigma} - i \hat{P}_{\vec{k}, \sigma}) = \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}^*$$

$$[\hat{c}_{\vec{k}, \sigma}, \hat{c}_{\vec{k}, \sigma}^{\dagger}] = \hbar$$

が解ります。



さて、物理量  $\vec{c}$  の  $\vec{k}$  成分を量子力学への拡張は単純に考えれば  $\hat{c}_{\vec{k}}$  となります。そして、この演算子は  $\vec{k}$  であらわされるベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  を持つ状態を生成する演算子  $\hat{a}_k$  に対して

$$\hat{c}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \hat{a}_k$$

の関係を持ちます。ここから、とても便利な電場の演算子



$$\hat{E} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \vec{e}_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))$$

$$\hat{B} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\vec{k}} V}} \vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{k} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))$$

が求められます。良かったですねえ。

## 3

## 量子光学（過去問）

## 試験はちゃんとした量子

しきたい4（久々に手ごたえあり）

## 1 問題 2



双極子モーメントの大きさが  $1[\text{eA}]$ 、遷移のエネルギーは  $2[\text{eV}]$  の自然遷移放出確率（Einstein の A 係数）を求めよ。必要ならば以下の値を用いよ。 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}[\text{fm}^{-1}]$ 、 $\hbar c = 1973[\text{eVA}]$



昔はいろいろ悩んだりもしましたが、今なら楽勝で出せるはずですね。プランクの式、エネルギー量子化説から  $\omega$  近傍のエネルギー量の期待値は

$$W_{th}d\omega = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega$$

です。



そして単位時間あたりに準位を移動する粒子の数の期待値を以下のように定めます。

$$E_2 \rightarrow E_1$$

$$p(2 \rightarrow 1) = A_{21} + B_{21}W(\omega)$$

$$E_1 \rightarrow E_2$$

$$p(1 \rightarrow 2) = B_{12}W(\omega)$$



$B_{12}$  はぶつける光やらエネルギーやらで定められる励起しやすさです。さらに

$$\omega \equiv \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$(A_{21} + B_{21}W(\omega))N_2 = (B_{12}W(\omega))N_1 \text{ (平衡状態を仮定)}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{e^{\beta(E_2 - E_1)}} \text{ (熱力学の平衡より)}$$



これらが与えられると

$$W(\omega) = \frac{A_{21}}{e^{\beta\hbar\omega} B_{12} - B_{21}}$$

プランクの式と比べることで

$$B_{12} = B_{21}, A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21}$$

となります。ようは  $B_{21}$  を求めればよいわけですね。



上で解説しましたが、軽く復習しましょう。上の準位と下の準位の波動関数を  $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  として（これは座標にのみ依存するとする）

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|2\rangle$$

$$H = H_0 + (-e\vec{r} \cdot \vec{E}) \equiv H + H_I \text{ (摂動するから第 1 項より第 2 項が小さいとする)}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \text{ (sh eq)}$$

以上が問題設定ですね。



両辺に  $\langle 1|e^{\frac{i}{\hbar}E_1t}$  をかけると

$$i\hbar\dot{c}_1 = c_1 \langle 1|H_1|1 \rangle + c_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \langle 1|H_I|2 \rangle$$

となります。  $\langle 1|H_I|2 \rangle$  を  $-\mu E_0 \frac{1}{2}(e^{i\omega_E t} + e^{-i\omega_E t})$  とできるとしましょう。

この近似部分が自信ないのですよね・・・まあ、よいとして

さらに、  $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t - i\omega_E t}$  を高速回転しすぎて無視できるという回転波近似を用いて  
問いを解くと



$$c_1(t) = (Ae^{i\Omega t/2} + Be^{-i\Omega t/2})e^{i\Delta t/2}$$

$$c_2(t) = \frac{-i2}{\chi^*} e^{i\Delta t} \dot{c}_1(t) = \left[ \frac{\Delta + \Omega}{\chi^*} Ae^{i\Omega t/2} + \frac{\Delta - \Omega}{\chi^*} Be^{-i\Omega t/2} \right] e^{-i\Delta t/2}$$

$$\Delta = \omega - \omega_e$$

$$\chi = \frac{\mu E_0}{\hbar}$$

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \chi^2}$$

となります。初期条件を  $c_1 = 0, c_2 = 1$  としてしまえば（そういう瞬間もあるからいける）  $A = -B = \frac{\chi^*}{2\Omega}$  となり、得られる解の形は



$$|c_1|^2 = \frac{\chi^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega}{2} t$$

遷移確率は弱い光（ $\chi \rightarrow 0$ ）としたうえで日ごろの定義に従って

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int d\omega' |c_1|^2 \rho(\omega') = \frac{\pi}{2} \left| \frac{\mu E_0}{\hbar} \right|^2 \rho(\omega)$$

$\rho(\omega) = 1$  と決めつけて、さらに電磁波のエネルギー密度を



$$W(\omega) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

とすれば、先ほどの関係式

$$p(1 \rightarrow 2) = B_{12} W(\omega)$$

から

$$B_{12} = \pi \frac{\mu^2}{\hbar^2 \epsilon_0}$$

となり、



$$A_{21} = \frac{|M_{21}|^2 \omega_0^3}{\pi \hbar^2 \epsilon_0 c^3}$$

と求められます。また、一般論として、ランダムに配向した原子気体を考える場合は

$$\int d\Omega \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

を用いて、 $A_{21}$  に  $\frac{1}{3}$  をかけるようです。

## 2 問題3

$t = 0$  で基底状態にいる回転波近似可能な電子の励起を考える。2準位のエネルギー差を  $\hbar\omega_0$  とし、光電場は  $E_0 \cos \omega t$  とする。さらに共鳴条件  $\omega = \omega_0$  とし、双極子モーメントは実数でその大きさを  $\mu$  とする。また、ラビ周波数を  $\Omega_R = \mu E_0 / \hbar$  とする。

- (1) : 光プロットベクトルを求めよ  
 (2) : これを用いて分極の期待値を求めよ  
 (3) : 時間変化する分極は電磁波を放出する。放出される波長が入射光と異なる成分を持つことを定性的に示せ



大分辛い問題が出てきましたね。兎にも角にもテクニカルタームが理解できなければ話になりません。ちょっと確認しつつ、今回の問でどんな値となっているか確認しましょう。

$$\text{ラビ周波数: } \Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + |\chi|^2} = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + |\frac{\mu_{12} E_0}{\hbar}|^2} = \mu E_0 / \hbar$$

$$\text{双極子モーメント: } \mu_{12} = \int \langle 1 | -e\vec{r} | 2 \rangle = \mu$$

$$\text{双極子との相互作用ハミルトニアン: } V_{12} = - \langle 1 | -e\vec{r} \cdot \vec{E} | 2 \rangle = -E_0 \mu \cos \omega t$$

此処まで確認できれば、あとは光プロット方程式のなすがままに従うだけです。

プロット方程式で使うマスター方程式の書きなおしは以下の通りです。

$$\rho_x = \rho_{21} + \rho_{12} = 2\text{Re}(\rho_{21}) = 2\text{Re}(\rho_{12})$$

$$\rho_y = \frac{1}{i}(\rho_{21} - \rho_{12}) = 2\text{Im}(\rho_{21}) = -2\text{Im}(\rho_{12})$$

$$\rho_z = \rho_{22} - \rho_{11}$$



時間発展もおなじみです

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hbar}(V_{21} + V_{12}) \\ \frac{i}{\hbar}(V_{21} - V_{12}) \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\hbar}\text{Re}(V_{12}) \\ \frac{2}{\hbar}\text{Im}(V_{12}) \\ \omega_0 \end{bmatrix} \text{ となります。}$$



さて、 $z$  軸中心に  $\omega$  で回転運動する系 ( $K'$  系) から見ると、時間発展の式は以下のようになります。

$$\frac{d\rho'}{dt} = (\vec{F}' - \omega) \times \rho$$

さらに回転波近似として、 $V_{12}$  を

$$V_{12} = -\frac{1}{2}\mu(E_0 e^{i\omega t} + E_0 e^{-i\omega t})$$

と書き直した時、第2項のみ  $K'$  系で無視できると近似すると (これが回転波近似)

$$(\vec{F}' - \omega) \equiv F' = \begin{bmatrix} \frac{2}{\hbar}\text{Re}(-\frac{1}{2}\mu E_0 e^{i\omega t}) \\ \frac{2}{\hbar}\text{Im}(-\frac{1}{2}\mu E_0 e^{i\omega t}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり、 $K'$  系でプロットベクトルは  $F'$  を中心に Rabi 周波数  $\mu E_0 / \hbar$  で回転することが解ります。 $K'$  系での初期位置は  $(0, 0, -1)$  なのでもう安心ですね。





さて、お次は分極の期待値を求めましょう。先ほど求めたブロッホベクトルは  $K'$  において

$$x = \sin \Omega_R t \sin \omega t$$

$$y = -\sin \Omega_R t \cos \omega t$$

$$z = -\cos \Omega_R t$$

で運動しているわけです。ここから  $\rho$  に戻すには方法が決まっています

具体的な計算は省略



$$(x + iy)e^{i\omega t} = \rho_x + i\rho_y = 2\rho_{12}$$

$$z = \rho_{22} - \rho_{11}$$

というものです。つべこべ言わずに代入すると

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} \sin \Omega_R t - e^{-i\omega t} e^{i\omega t} = -\frac{1}{2} \sin \Omega_R t$$

となります。



密度行列の成分が解れば、物理量の値の計算は容易にできて

$$\langle V \rangle = \text{Tr}(\rho V) = \rho_{12} V_{21} + \rho_{21} V_{12} = -2 \times \frac{1}{2} \sin \Omega_R t \times -E_0 \mu \cos \omega t = E_0 \mu \cos \omega t \sin \Omega_R t$$

となります。



分極が時間変化するという事は、電磁気学の法則に従えば

$D = \epsilon \epsilon_0 E$  における  $\epsilon$  が時間変化するという事です。電磁気の波動方程式のことを考えれば、このような状態では様々な波長の波が出てきてしまうことがいえます。

### 3 問題 4



$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \vec{e}_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))$$

$$\hat{B} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\vec{k}} V}} \vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{k} (\hat{a}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} \exp(i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}))$$

が量子化された演算子である。

$$\langle n_k | E_k \cdot E_k | n_k \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle n_k | |n_k \rangle = \frac{\hbar\omega_k}{V} (n_k + \frac{1}{2})$$

モード  $k$  のエネルギー:  $\hbar\omega_k (n_k + \frac{1}{2})$  を示せ



$$\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^+\hat{a}^+ \text{ は } 0 \text{ になってしまうので除外して } E_k \cdot E_k = \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V} (\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$$

$$(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) = 2\hat{a}^+\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^+] = 2\hat{a}^+\hat{a} + 1$$

これを利用すれば、あっさりと  $E$  での証明が終わります。



$B$  についてもちょっとひねれば終わりです。演算子については同じなので

$$\frac{1}{\omega_{\vec{k}}^2} k^2 \frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 \text{ を示せば終わりです。}$$

やるまでもなく

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \text{ の式に書き直して解くことができます。}$$



モード  $k$  のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \text{ で示せるので}$$

エネルギー和についても容易に求められます。

## 4 問題 5

温度  $T$  で熱平衡状態にある単一モードを考える。この状態での密度行列は

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

$$H = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \hat{a}^+ \hat{a}\right)$$

である。

(1) :  $Tr(\rho) = 1$  から  $Z$  を求めよ

(2) : 平均光子数  $N$  を求めよ

(3) : 分散  $(\Delta N)^2 = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$  を求めよ

(4) : 光子数が  $n$  である確率は  $\rho_{nn}$  であらわされる。この確率を  $n, \langle N \rangle$  であらわせ



量子化された場なので、固有状態は  $|n\rangle$  であらわされる。よって

$$\sum_k \frac{1}{Z} \langle k | e^{-\beta H} | k \rangle = \frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2} + k)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}} = 1$$

が満たされる。以上より

$$Z = \frac{e^{-\beta \hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}$$



期待値は統計力学でおなじみの解法で求めます。

$$\langle N \rangle = \frac{\sum_k k e^{-\beta \hbar\omega/2} e^{-\beta \hbar\omega k}}{\sum_k e^{-\beta \hbar\omega/2} e^{-\beta \hbar\omega k}}$$

となっていることから

$$\langle N \rangle + \frac{1}{2} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta \hbar\omega}$$

$$\beta \hbar\omega = \chi \text{ として } Z = \frac{e^{-\chi/2}}{1 - e^{-\chi}}$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^\chi - 1}$$



分散もによるよると求められます。

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \langle n^2 \rangle + \langle n \rangle + \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle + \frac{1}{4}$$

となることから、分散も求められます。

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(Z)$$

$$= \frac{e^{-\chi}}{(e^\chi - 1)^2}$$



最後は確率ですがこれも何事もなかったかのように解けます。

$$\frac{1}{Z} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \frac{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}{e^{-\beta \hbar\omega/2}} e^{-\beta \hbar\omega(\frac{1}{2} + n)}$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^\chi - 1} \text{ より}$$

$$e^{-\chi} = \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle}$$

を用いればどうってことはありません。

$$P(n) = \left(1 - \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle}\right) \left(\frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle}\right)^n$$

