

1

物理計測法特論

いつも東方だと思うなよっ！

しけたい4 (レアキャラ)

1 謝辞



無断転載禁止です

- ・アイコンは夏蛸様のものを転載しています
- ・レポート問題の答えどこが違うんだと尋ねられると答えに困ります
- ・間違い見つけたらご連絡ください
- ・あくまで参考資料として扱ってください。レポートは自力で解くのをお勧めします

2 夏コミ準備疲れ



貧乳はローレンツブーストだ！相対論的現象だ！



いけません。そんなことばかり言っていると、アグネスのお化けが出てきますよ・・・



な、何バカなこと言ってるのよ？



うらめしや～



き、きゃあああああああああああ！

ばかり



????



お盆だからちょっとふざけてみただけなのに。。

春に院生になったと思ったらもう夏なのね。

夏は暑くてけだるくて、何をするのも面倒くさくなるもの。でも、だからこそ、前を見ていてばかりの貴方も、たまには後ろを振り返って、今まで支えてくれた人にありがたうを言えるそんな季節なのかもしれないわね。



そんなこんなで、幽霊が与えたのか妖精が与えたのか、実験屋さんをしばしば悩ませるノイズの紹介はこの私が担当させていただきます。

うらめしや～。なんちゃって♪

3 ナイキストの熱雑音



抵抗の熱雑音を考えるために、LC 回路の微分方程式に雑音の項を加えます。LC 回路の電流の微分方程式は

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR}$$

と書けます。抵抗の熱雑音はランダム力を抵抗間の電位に与えると仮定すれば、微分方程式は伊藤先生の授業で扱ったのと同じ形で



$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{CR} + \frac{V(t)}{R}$$

となります。あとは前回のシケプリと同じ方針で答えを求めます。 $V(t)$ の形として

$$\langle V(t) \rangle = 0$$

$$\langle V(t_1)V(t_2) \rangle = D_V \delta(t_1 - t_2) \text{ (白色ノイズを仮定)}$$



後はひたすら解きましょう。同じ答えを何回も書くのは指がつかれますが練習です。

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0)e^{-t/CR} + e^{-t/CR} \int_0^t e^{t'/CR} \frac{V(t')}{R} dt' \\ \langle Q(t)^2 \rangle &= Q(0)^2 e^{-2t/CR} + e^{-2t/CR} \int_0^t e^{(t'+t'')/CR} \frac{\langle V(t')V(t'') \rangle}{R^2} dt' dt'' \\ &\quad + 2Q(0)e^{-t/CR} e^{-t/CR} \int_0^t e^{t'/CR} \frac{\langle V(t') \rangle}{R} dt' \text{ (最後の項は0になる)} \\ &= Q(0)^2 e^{-2t/CR} + e^{-2t/CR} \int_0^t e^{2t'/CR} \frac{D_V}{R^2} dt' \\ &= Q(0)^2 e^{-2t/CR} + \frac{CD_V}{R} [1 - e^{-2t/CR}] \end{aligned}$$



平衡状態で $\langle Q(t)^2 \rangle = \langle Q(0)^2 \rangle$ を仮定すると
 $\langle Q(t)^2 \rangle = Q(0)^2 e^{-2t/CR} + \frac{CD_V}{R} [1 - e^{-2t/CR}]$ より
 $\langle Q(t)^2 \rangle = \frac{CD_V}{R}$
 次にコンデンサの静電エネルギーについて考えます。



コンデンサの静電エネルギーは $E = \frac{Q^2}{2C}$
 となります。これまた伊藤先生の授業の使い回しですが、このようにエネルギーが表
 される場合、等分配則より
 $\langle Q^2 \rangle = Ck_B T$
 となります。先程求めた関係と比べて



$Ck_B T = \frac{CD_V}{R}$ より
 $D_V = Rk_B T$ が求められます。
 最後にこれをパワースペクトルに直せば、めでたく授業で出てきた熱雑音の関係を導
 出することができます。



ウィーナー・ヒンチンとかいうと身構えるかもしれませんが、要は定義に従って計算
 するだけです。パワースペクトルは
 $S_V(f) = 2T \langle V(f)^2 \rangle$ で表されるので
 $S_V = \frac{2}{T} \int dt_1 \int dt_2 e^{-2i\pi f(t_1-t_2)} \langle V(t_1)V(t_2)^* \rangle dt_2$
 より、 V の期待値の条件から
 $S_V = 4D_V$ が求められます。



以上より、 $S_V(f) = 4Rk_B T$ です。
 $1k \Omega$ の抵抗の $300K$ での熱雑音なら $4 \times 2.59 \times 10^{-3} [k\Omega \cdot eV]$
 で求められます。

4 ショットキー雑音



どうも谷口に生まれ変わった説がある (ry
 ショットキー雑音はそんなにいじりどころがないので私が担当します。
 電流を「単位時間内にある場所を通る電子の数の期待値」と考えることで導いていき
 ます。



期待値を求めるために時間 T の間観測したとして、
 $I(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t I(t') dt' = \frac{e \langle N(t) \rangle}{T}$
 ($N(t)$ は t に於いて T の間に通った電子の数の期待値)
 となります。



ここで、「 N が以下のような Poisson 分布に従う」ことを要請します。すなわち
 $\langle N \rangle = \lambda T$ 、 $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \lambda T$
 を要請します。すると



$\langle I(t) \rangle = e\lambda$ 、 $\delta I_T \equiv \langle (I(t) - \langle I(t) \rangle)^2 \rangle = \frac{e^2 \lambda}{T} = \frac{eI}{T}$
 ここで、揺らぎをパワースペクトルに直すために、周波数と測定時間 T の関係
 $\Delta f = \frac{1}{2T}$ を用いると
 $\delta I_T = 2eI_0 \Delta f$ となり、パワースペクトルは
 $2eI_0$ となります。

5 各種デバイスの雑音

5.1 OP アンプ



再び私の出番ですね。まずは OP アンプから逝きましょう。

OP アンプに抵抗をかませて電流を流すことを考えます。入力電源には既知の熱雑音 $4Rk_B T$ があるとします。これに、OP アンプの電流のノイズと、OP アンプの熱雑音を加えたものが雑音の総和になります。



今回目的とするのは「入力信号のノイズに対する出力信号のノイズの大きさの比率の最小化」です。そこまで理解すれば授業の pdf で十分太刀打ちできるでしょう。さ、計算しますよ。ノイズの和は

$$\begin{aligned} v_f &= e_n + Ri_n + v_R \\ \langle v_f^2 \rangle &= \langle e_n^2 \rangle + R^2 \langle i_n^2 \rangle + 4Rk_B T \\ &= 4k_B TR \left[1 + \frac{1}{4k_B T} (RG_i + \frac{G_n}{R}) \right] \end{aligned}$$



大括弧の中の第 2 項を小さくするのが目的です。式の形からわかるとおり、
 $R = \sqrt{\frac{G_e}{G_i}}$ (最適信号源抵抗) となるとき最小となり、そのときのノイズの比は
 $\frac{v_f}{4k_B TR} = (1 + \frac{\sqrt{G_e G_1}}{2k_B T}) \equiv 1 + \frac{T_n}{T}$
 となります。この温度 T_n が雑音温度です。



ちなみに、具体的なデバイスを調べる場合はデータシートで noise あたりで検索しましょう。INPUT NOISE の in、en がこの問題で求められているパラメータです。といふかなんで授業の pdf では日本語でしか表記してないでしょうね。input noise で検索しないとデータシート上で見つからないのに。

データシートより抜粋。計算くらいは自分でやるように

【LF356】

en 15(100Hz) 12(1000Hz) nV/√ Hz

in 0.01(100Hz) 0.01(1000Hz) pA/√ Hz

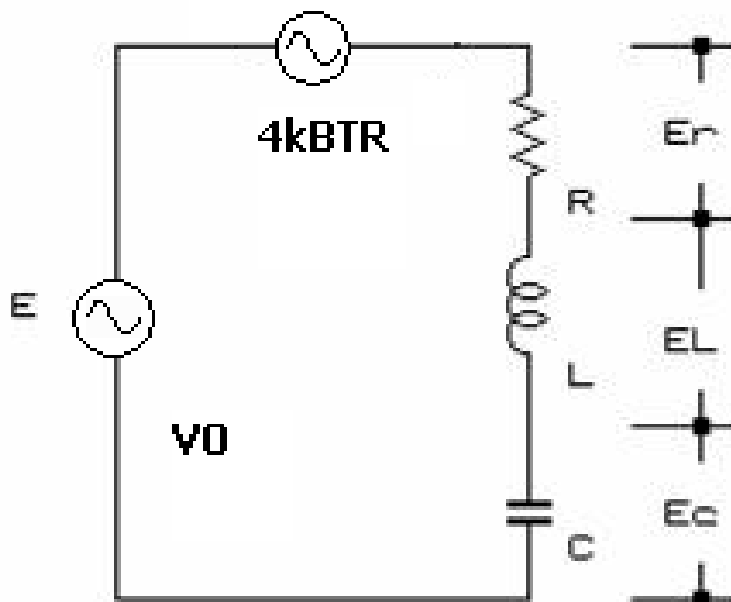
【OP27】

en 3.5(10Hz) 3.1(30Hz) 3.0(1000Hz) nV/√ Hz

in 1.7(10Hz) 1.0(30Hz) 0.4(1000Hz) pA/√ Hz



5.2 共振回路



最後に共振回路の問題を考えます。ようは問2ですね(何)

端的に言いますと、最初の二つは交流回路のインピーダンス計算問題です。できなかったら反省してください。



合成されたインピーダンスは

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

共振するには $\omega = \sqrt{LC}$ となればよいです。



振幅も難なく解くことが可能で

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

よって、電流の振幅は

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$



各々の振幅は

$$\begin{aligned} R &: \frac{RV_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ C &: \frac{V_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ L &: \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \end{aligned}$$

となります。

最後に熱雑音の考察ですが、熱雑音は電源に周波数ごとに決まった強度を持ったの雑音が加わったものと考えればよいので、この系におけるコンデンサ間の電圧、コイルの電圧の周波数応答関数を求めれば答えが出ます



$$\begin{aligned} \text{周波数応答関数@抵抗} & \frac{R}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \\ \text{周波数応答関数@コンデンサ} & \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \\ \text{周波数応答関数@コイル} & \frac{i\omega L}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \end{aligned}$$



周波数応答関数を $H(\omega)$ としたとき、電圧のパワースペクトルは

$S_V |H(\omega)|^2$ で求められます。後はガリガリと計算して

$$\text{分母絶対値の 2 乗} : R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2$$

これを出せば跡はらくらく作業ゲーで、問いの答えは



$$\begin{aligned} \text{抵抗} &: 4k_B T R \cdot \frac{R^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ \text{コンデンサ} &: 4k_B T R \cdot \frac{(\frac{1}{\omega C})^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ \text{コイル} &: 4k_B T R \cdot \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \end{aligned}$$

となります。もっと見やすく式変形すべきでしょうが、そこは各自やってください。



柏の駄犬うるさい。駄犬の遠吠えが別の駄犬の遠吠えを呼び起こすという距離 2 乗に反比例したパラメータで動く連鎖のシミュレーションと考えるか。駄犬の場所配置を最適化すれば静かになるかもしれない。いや、保健所に送るのが一番楽だけど。