

1

フラクタルの数学と物理

意外と高度

しくやろー (プラモは魔理沙にしようかな)

1 記事紹介・・・久々だからね



- ・アイコンを更新してみた。意味もなく。
- ・アイコンは夏蛸様提供 (無許可)
- ・無断転載しちゃめ
- ・中身が間違ってるかもね
- ・質問したい方は適時

2 罪符「ブラウン運動する大罪」



.....

全く。人間はどうしてこんなに行列が好きなのでしょうね・・・



彼岸でもすれ違い通信が可能になってから、外に出歩く魂が増えましたからねえ。とはいえ、ただ地図を交換するためだけに歩き回るのも退屈だ。そんなところでしょう。なかなかにあっばれな魂じゃないですか。



(ラーメン店に並ぶ魂を眺めながら)

「らあめん」ねえ。ちょっと食べてみたいわ・・・



何か言った？

彼岸で魂に勝手に歩きまわらせるわけにはいかないわ。はいこれ。彼岸での魂の徘徊のルールを作ったから。魂たちに配って回って。

時間は・・・そうね。行列の規模大きさからして.....



行列たちの大きさを l としたら時間は l^2 に比例しますね。
じゃ、行ってきまーす♪



実は 2 乗じゃないのだけどね。浮いた時間で食べにいこっと♪
市場調査も仕事のうちってね♪

3 フラクタルとフラクタル次元



「フラクタル」は「部分と全体が相似の関係を満たす図」として導入された概念です。
とはいえ、研究が進むにつれて様々な拡張がなされてきたおかげで、厳密な定義が難しくなっていました。ので、気軽に「こういった図形の解釈の技法があるんだ」と言った具合で受け入れてるとよいでしょう。
自然界の様々なところでフラクタルは確認できるので知っておくと得ができるかも知れませんよ。

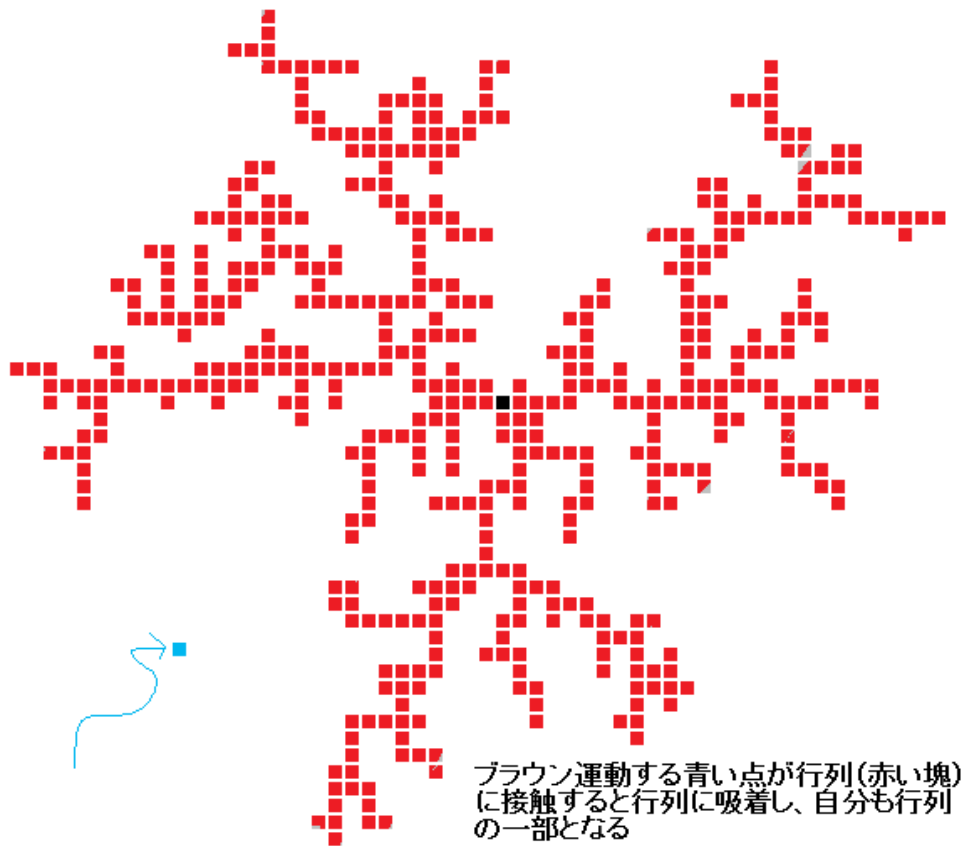
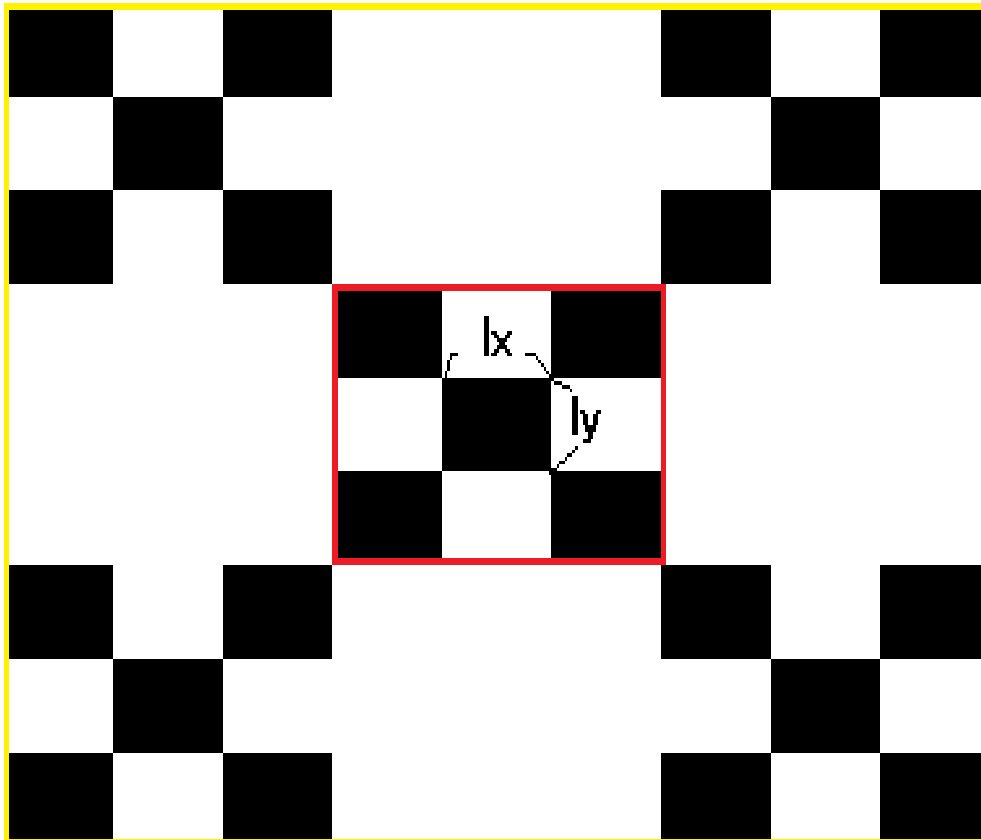
図 1：解りやすいフラクタルの図

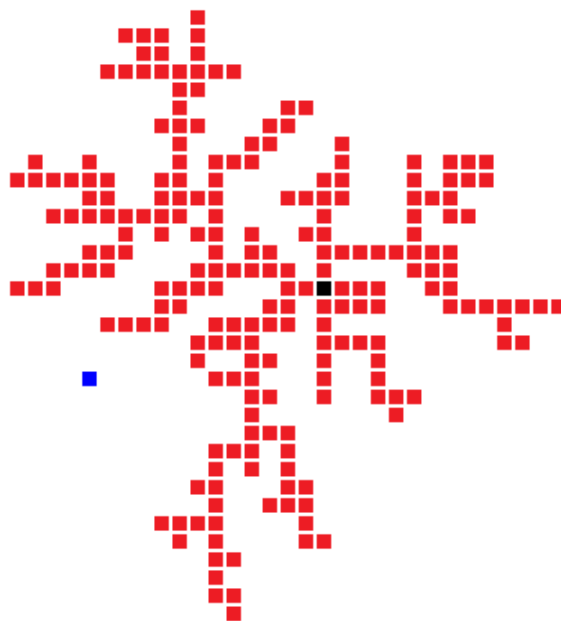


見ての通り同じ図形が繰り返し出てきていますね。「見ての通り」という表現にごまかしのにおいが漂いますが許してください。

図 2：黒い点（ラーメン屋）に集う客（赤）の図。これもフラクタル

今の彼岸の状況です。ブラウン運動する魂が店、または店に並んでいる行列に接触するとその場で固まり、自らも行列になる。





後者の大きさ違い ver はこちらです。大きいほうの図形を遠くから見ると小さい方の図形に近い形に見えてきますね。

・・・見えてきますよね？



さて、高尚なるフラクタルがこんな手抜きない概念なわけがありませんね。というわけで、「フラクタル」として議論するのに欠かせない「フラクタル次元」の概念を勉強しましょう。

例えば先ほどの例の図、赤い四角と黄色い四角で囲まれた部分の大きさと面積を考えましょう。



赤い部分：

大きさ = $3l_x \times 3l_y$ 、面積 = $5S$

黄色い部分：

大きさ = $9l_x \times 9l_y$ 、面積 = $25S$

一番小さい四角の面積を S とする



この調子でいけば、例の図はさらに拡大して

大きさ = $9l_x \times 9l_y$ 、面積 = $125S$

となることが解りますね。察しの良い方なら気付いたと思いますが、この図形は「3 倍に拡大することで面積が 5 倍」になっています。図形としての大きさを l であらわせば面積は

$l^{\log_3 5}$ に比例すると言えるのです。この $\log_3 5$ が「フラクタル次元」です。



フラクタル次元の概念を使えば、今、彼岸で魂たちが作っている行列の塊のフラクタル次元を求めることも可能です。具体的には行列の縦幅や横幅をパラメータ l であらわした場合、行列を作る魂の数は $l^{1.67}$ に比例します。



そう、魂の数は l^2 に比例しないのです。つまり、ちょっと位並んでも時間にはまだ余裕があるというわけですね・・・
並んでいる間にフラクタル次元の計算方法を説明しましょう。

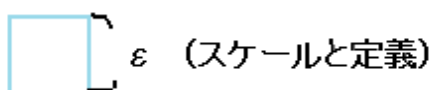
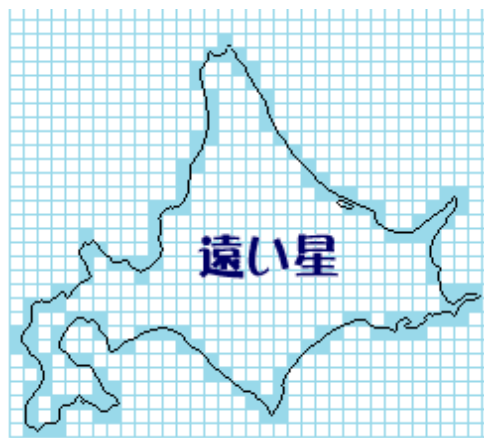
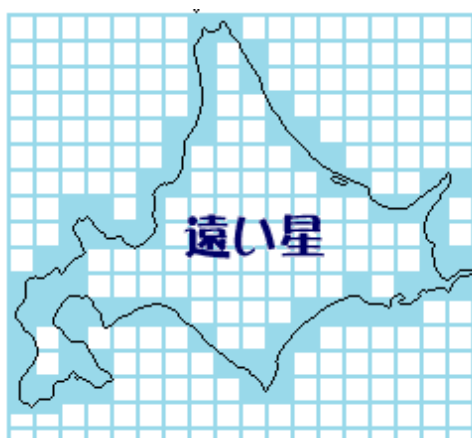
4 フラクタル次元の計算方法



次はいよいよおまちなね、フラクタル次元の計算方法を取り扱います。フラクタル次元の求め方が解れば、貴方が解析したい図形はフラクタル的な性質をもっているのが解りますし、持っていた場合フラクタル次元から様々なことが議論できて大変便利です。



最初のほうでフラクタルは世に満ち溢れているといいましたが、実は海岸線もフラクタルとして扱うことが可能です。日本地図で見える海岸線のギザギザ具合と世界地図で見える大陸の大きな海岸線のギザギザ具合が似たようなものだろうということです。おバカさんが作った北海道を例に、北海道の海岸のフラクタル次元を求めてみましょう。



計算機にフラクタル次元を求めさせる方法は見てもっともシンプルです。統計力学のスケーリングを思い出させる感じですね。スケール（上図の青い四角の大きさ）を変えながら、海岸線の長さ（塗りつぶされたマス）の数を数えていき、（スケール、マスの数）を両対数グラフに代入すれば傾きからフラクタル次元が求められます。



先ほどのような「面積」の例も同様にしてフラクタル次元を求めていきます。数学的にはマスが大きさが0の極限に近づいた時の傾きを使って求めます。一応数学的に定義しておきましょう。



$N_\epsilon[P]$: スケール ϵ で条件 P を満たすマス目の数

$N_\epsilon[S]$: スケール ϵ で測定したい図形 S に含まれるマス目の数

D_S : 図形 S のフラクタル次元

$l[S]$: 図形 S の大きさ (スケールによらず不変)

$N_\epsilon[S] \propto \epsilon^{-D_S} \propto l[S]^{D_S}$

$D_S = -\frac{\log(\delta + N_\epsilon) - \log(N_\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (\delta \rightarrow 0), (\epsilon \rightarrow 0)$

5 DLA とラプラス場

(列に並びながら)



ランダムウォークや非整数ブラウン運動 (オマケ参照) をする粒子が、クラスター表面に接触することによってクラスター化するという現象は物理世界でも良くあるとされている話です。菌がコロニーを作る、魂が人気店に並ぶなどですね。こういったクラスター合成は「DLA」と呼ばれていて、様々な物理的性質やフラクタル次元を求める為の理論が構築されています。



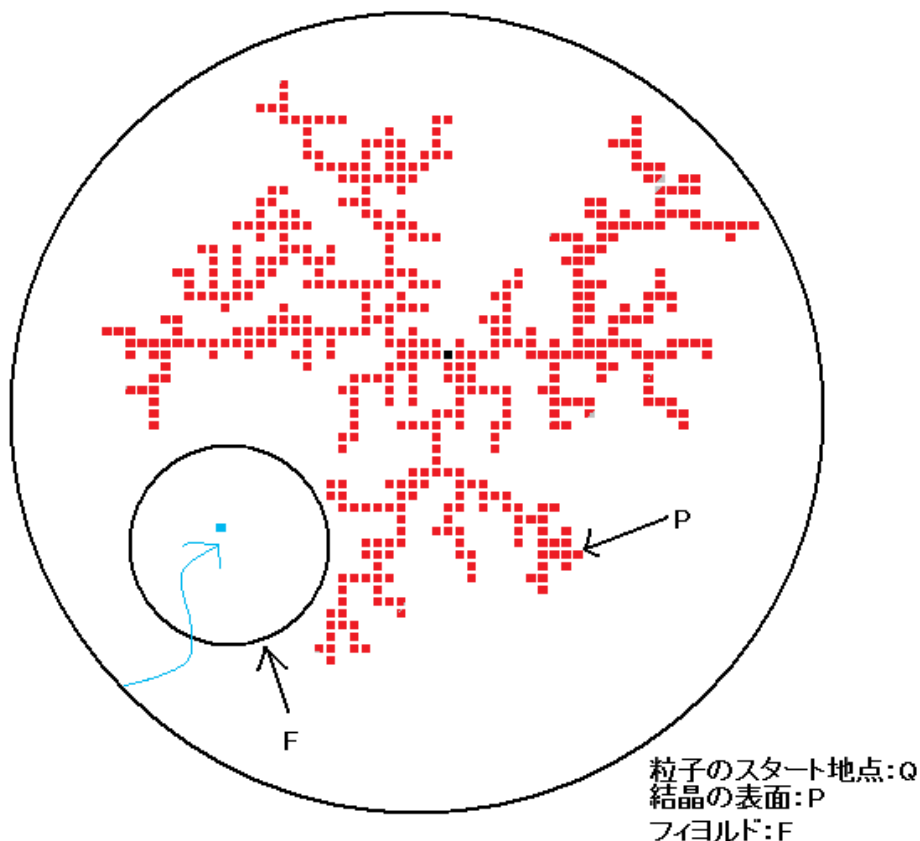
まずは以下の図のように用語を定義します。粒子は十分遠方から飛来し、方向などへの依存はないとします。また、確率変数、場の関数を

$p(A, B)$: 点 A から B へ粒子が P, Q に接触することなく行ける確率

粒子が過去の軌道に依存しないなら $P(A, B) = P(B, A)$ を正確に満たす。

$\phi(r) = \sum_P \phi_0 p(P, r) + \sum_Q \phi_\infty p(Q, r)$: 場の変数

$P(P_0)$: クラスター近傍の P_0 でのクラスター成長確率



なお、粒子の運動がブラウン運動の場合、 $\phi(r)$ は Q 部分の電位が ϕ_∞ 、P 部分の電位が ϕ_0 とした時の r での電位に等しいです。(詳細はほかの計算機資料参照されたし) といふか、ラプラス方程式を満たし境界で一定値をとる場の変数が上のようにあらわせるから DLA が物理に有用なのです (詳細は後)



無限に長い時間待つとすれば

$\sum_{P,Q} P(r, P) + P(r, Q) = 1$ を満たします。クラスターの境界近傍の点 P_0 を用いれば

$$\phi(P_0) = \phi_0 \sum_Q (\phi_\infty - \phi_0) p(P_0, Q)$$

$$\phi(P_0) - \phi \propto |\nabla \phi| \text{ より}$$



$$|\nabla \phi| \propto \sum_Q p(P_0, Q)$$

また、境界近傍の点でクラスターが成長する確率はアルゴリズムのルールより

$$P(P_0) \propto \sum_Q p(P_0, Q)$$

となります。以上から

$$P(P_0) \propto |\nabla \phi| \text{ が満たされます。}$$



以上より、金属溶液中の 2 点に電場をかけ金属が析出されてクラスターが作られるモデルに於いて、クラスターの表面での成長確率が $|\nabla \phi|$ に比例するならば、このモデルは上記 DLA アルゴリズムでクラスターの形がシミュレーションできそうだとということが予想できますね！

5.1 もうちょっと凝った DLA



折角此処まで理論が求められたので拡張をしてみましょう。

しつこいですが、DLA で物理的な問題をいじるにあたり大事なのは、何らかの場を表す変数 $\phi(r)$ がラプラス方程式を満たし、表面や境界で一定の値を持つことです。

$\phi(r) = \sum_P \phi_0 p(P, r) + \sum_Q \phi_\infty p(Q, r)$ (此処からラプラス方程式を満たすと言える)

$|\nabla\phi| \propto \sum_Q p(P_0, Q)$ (上の式から持ち出される)



さて、先ほどの問いを一般化して、上記条件を満たすラプラス場で表面でのクラスターの成長確率が

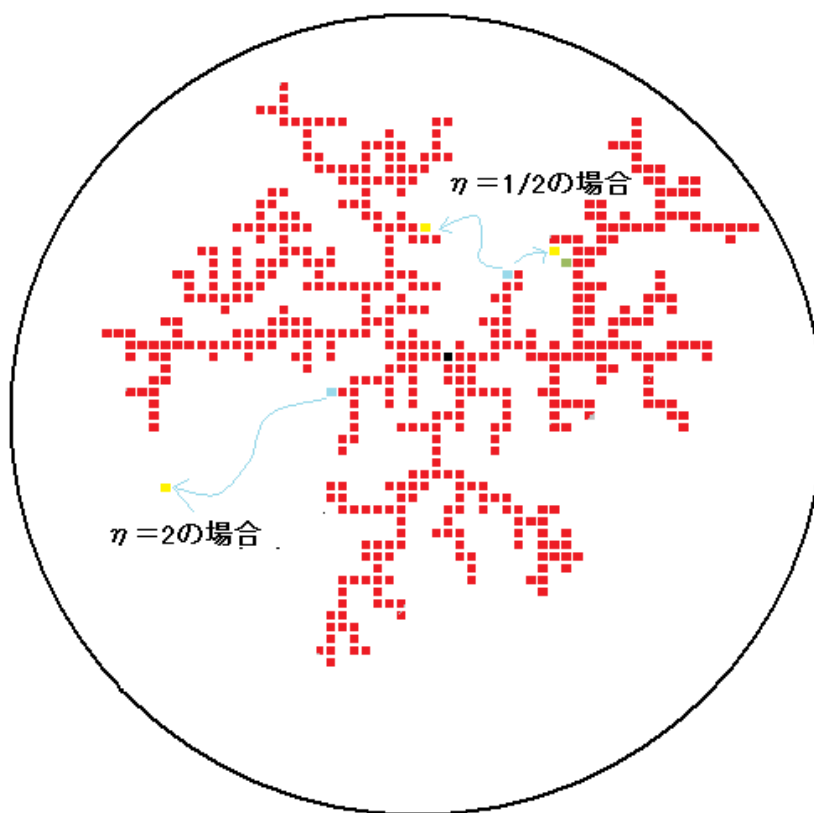
$|\nabla\phi|^\eta$

に比例するクラスターの成長を DLA でシミュレーションする方法を考えましょう。

別に身構える必要はありません。上記条件より $|\nabla\phi| \propto \sum_Q p(P_0, Q)$ なので



アルゴリズム内で P_0 の位置でクラスターが成長するような確率が $|\sum_Q p(P_0, Q)|^\eta$ に比例すれば良いわけです。具体的には以下図の例のようなアルゴリズムになります。





$\eta = 2$ の場合：

クラスターに付着したら、その接点をスタートに粒子（黄色）を「1 個」発射します。その粒子が遠方 Q に到達した場合のみ付着した点（水色）部分のクラスターを成長させます。このアルゴリズムでの P_0 でのクラスターの成長確率は言うまでもなく

$$P(P_0) \propto (\sum_Q p(Q, P_0))(\sum_Q p(P_0, Q)) \propto |\nabla\phi|^2$$

となりますね。

$\eta = \frac{1}{2}$ の場合：

クラスターに付着したら、その接点をスタートに粒子（黄色）を「2 個」発射します。その粒子が「両方とも」クラスターに付着した場合のみ付着した部分（黄色）部分のクラスターを成長させます。このアルゴリズムでは P_1 と P_2 が同時に成長する確率 $P(P_1, P_2)$ は

$$P(P_1, P_2) \propto \sum_Q \sum_P p(Q, P)p(P, P_1)p(P, P_2)$$

となりますね。

$P(P_1, P_2)$ の性質は経験則から予想されています。まず、 P_1, P_2 でのクラスターの成長は独立であるとして

$$P(P_1, P_2) \propto P(P_1)P(P_2)$$

さらに、クラスターが十分大きいなら境界に P_1, P_2 は最初にクラスターに付着した接点 P_0 に限りなく近く $p(P_0, P_1)$ は P_0, P_1 が近いとき定数となり、 P_1, P_2 の成長には近傍の点の影響のみを考慮すればよいとすれば

$$P(P_1, P_2) \propto P(P_1)P(P_2) \simeq P(P_0)^2 \propto \sum_Q p(Q, p_0)|\nabla\phi|$$

となり、確かに $\eta = \frac{1}{2}$ の状態を満たすことが解ります。

何やら釈然としない感じもしますが、実際に $\eta = \frac{1}{2}$ となるような系が発見されれば検証できることでしょう。

5.2 DLA のフラクタル次元の理論



さて、漸く最初のほうで定義したフィヨルドを使うチャンスがやってきましたね。この原理も経験則を基に作られています。しかし文献を見るに実際のシミュレーション結果とよく合致するようです。素晴らしいですね。

まずは $\eta = 1$ のモデル、つまり遠方からふらふらと粒子がやってくるアルゴリズムですね。

再び経験則からですが、フィヨルドは以下の性質を満たします。

1. フィヨルドの数クラスターの大きさに依存しない
2. フィヨルドに粒子が行く確率はフィヨルドの大きさを l として l^d となる
3. フィヨルドに入った粒子は必ず一定の確率でクラスターを構成する
4. フィヨルドの大きさはクラスターに比べると十分小さい





d は DLA を行う空間の次元です。フィヨルドは運悪く一度入ったらほぼ出られないような空間と思うとよいでしょう。恐らく、誰かがしつこくシミュレーションをしていた時、上記の性質を満たすフィヨルドがあることに気づいたのでしょう。



さらに、フラクタル次元をもつクラスターは以下の条件を満たします。

1. 大きさ r のクラスターの中心から距離 r となる粒子の数は r^{D_s-1} を満たす
2. 結晶が成長する確率は r^{D_s-1} に比例する



実際に実験してみると解りますが、クラスターが大きくなると、毎度毎度似たような領域に入り込んだ粒子が似たようなところの結晶を大きくしていることをヒントに考え出されたそうです。以上の仮定はサクッと認めていただくとして、先に行きましょう。



フィヨルドに入った粒子がフィヨルドの表面に顔を出す回数はフィヨルドの長さで粒子の運動のフラクタル次元によって決まり、具体的には l^{d_w-1} となります。 d_w はブラウン運動の場合は 2 となり、直線運動の場合は 1 となります。



さて、フィヨルドの大きさがクラスターに比べて小さいことから、フィヨルドの表面の中心からの距離は一律でクラスターの大きさ r とみなすことができます。

中心から距離 r のある点でクラスターと接触する確率は r^{D-d} であらわされます。



フィヨルドの条件 3 より

$$r^{D-d} l^{d_w-1} \propto 1 \text{ より}$$

$$l \propto \frac{d-D}{d_w-1}$$

となります。そしてクラスターの条件より

$$r^{D-1} \propto l^d \text{ より}$$



$$D = \frac{d^2 + (d_w - 1)}{d + (d_w - 1)}$$

となります。ここからも、彼岸の行列の次元が計算できますね♪

5.3 DLA のフラクタル次元の理論の拡張



$$\text{先ほど、} \eta = 1 \text{ の場合で } D = \frac{d^2 + (d_w - 1)}{d + (d_w - 1)}$$

となることを言いましたが、一般の η の場合はどうなるでしょう？



ネタばれしてしまえば答えはいたってシンプルで

$$D = \frac{d^2 + \eta(d_w - 1)}{d + \eta(d_w - 1)}$$

となります。しかしこれ、深く考え込むとどうも釈然としません。本ではさも当たり前のように振舞っていますが。そんなわけで、ちょっと解説します。納得できる理解の仕方が思いついた方ご連絡ください。



先ほど定義した P, Q に加えて、以下の領域を定義します。

F_{in} : フィヨルドの入口。ここに入った粒子は一定の確率でクラスターを作る

F_{ex} : フィヨルドの表面。

[S] : フィヨルドの表面がクラスターの要素である確率 $\propto r^{d-D}$



先ほどと同じようにフィヨルドに粒子が入る確率は l^d に比例するものとします。

また、フィヨルドの入口にいる粒子が Q にたどり着く確率も一定として扱います。フィヨルドが入り組んでいる場合はほぼ帰ってこないでしょうし、逆にスカスカの場合はほぼ確実に遠方に戻ってしまうからでしょう。



なお、 $\eta = n$ の時のアルゴリズムより

$$p(F_{in}, F_{ex}) \propto l^{d_w - 1}$$

が満たされることが解ります。

実際は $\sum_{F_{ex}} \dots$ のような式を立てなければならないのかも知れませんが、対称性から任意の F_{in}, F_{ex} に於いて $p(F_{in}, F_{ex})$ は何かしらの値の近傍であると仮定します。



さらに $\eta = 2$ に対応するアルゴリズムで、フィヨルドに入った粒子がクラスターを構成する確率は

$$p(F_{in}, F_{ex})p(F_{ex}, F_{in})^{n-1} \times [S]p(F_{in}, Q)$$

となり、これが一定の確率になるためには

$$p(F_{in}, F_{ex})r^{d-D} \propto 1$$



以上より、確かに上記の式のようなフラクタル次元を持つことが予想できます。

また、 $\eta = \frac{1}{m}$ の場合、フィヨルドに入った粒子がクラスターを構成する確率は

$$p(F_{in}, F_{ex})[S] \times p(F_{ex}, F_{ex})^m [S]^m$$

$p(F_{ex}, F_{ex})$ は一定の値とすれば

$$p(F_{in}, F_{ex})r^{(m+1)(d-D)} \propto 1$$



ちなみにこれ、本では

$$p(F_{in}, F_{ex})r^{m(d-D)} \propto 1$$

となっています。そしてこちらでないと、 $D = \frac{d^2 + \eta(d_w - 1)}{d + \eta(d_w - 1)}$ は成り立ちません。しかし釈然としないのが悲しいところです。ちなみに、実験データは $D = \frac{d^2 + \eta(d_w - 1)}{d + \eta(d_w - 1)}$ にかなり近い振る舞いをしています。どこか解釈を間違えたのでしょうか。



がっ・・・・・・・・



おやおや、横入りはよくないですね・・・って
うわあああ！



フラクタル次元を私が間違えるとでも？
妙に仕事が早かったから後を付けてみればお金を稼ぐところか時間もお金も散在して
いるなんて。罪状は解ってるわね？



いやあ、市場調査ってのも世の中必要だと思うのですよ。管理する側とされる側で考
えることが違うってのはよくあることじゃないですか。



あらあら。管理する側は勝手にさぼって行列に並ぶことを許可するつもりはないのだ
けど、管理される側はそう考えていないってことかしら？
反省の様子なし。執行猶予はいらなさそうね？



あ。あの一。出来れば今流行りの陪審員制度を適用していただけると助かるので
すが・・・

6 マルチフラクタル





ぴちゅーん♪



裁判の様子、および刑の執行は清純なる物理学科生には耐えがたきものと判断しました。彼女たちの表情からお察し、お楽しみください。

なお、ここから先は罪状読み上げの代わりに山田氏によるマルチフラクタル講座となります。



さて、フラクタル次元や DLA のお陰で現象の物理的解釈の方法が増えましたね。マルチフラクタルはそのさらなる拡張です。

今まで 0 か 1 かで判別してきたものには「濃度」の概念を加え、単一のフラクタルでは表現しきれないであろうものもスペクトルの概念を導入して扱ってみようと試みます。

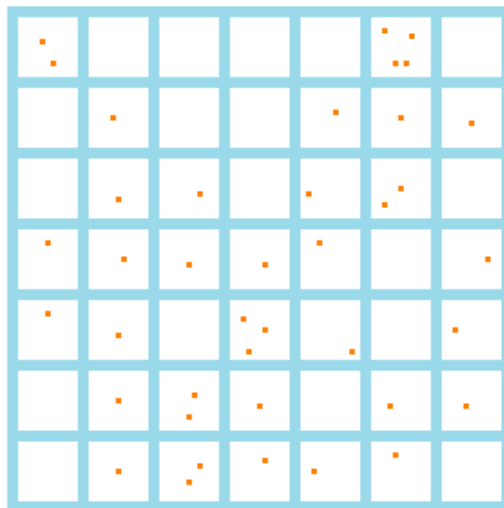


統計力学とのリンクや、乱流の処理にもマルチフラクタルを使うことができます。これらのアドバンスな内容は時間があったらやりましょう。

6.1 マルチフラクタルの定義



マルチフラクタルのルール自体は非常にシンプルです。以下の図で十分に理解できるでしょう。



赤い点が測定したい対象
青い枠が我々が勝手に作るスケール。一辺 ϵ とする。

各々の枠の中にある赤い点の数を数え上げることで「濃度」として扱うことができる。



各々の枠の中にある粒子の数を N_i と表記します。また、全粒子の数を N_0 とし、 $P_i \equiv \frac{N_i}{N_0}$ とします。枠の大きさ ϵ は可変なので $P_i(\epsilon)$ と表記しましょう。また、 $P_i(\epsilon) = N$ を満たす i の数を $N(P(\epsilon), N)$ と定義します。



マルチフラクタルで最終的に作りたいのはスペクトル関数 $f(\alpha)$ でそれは $N(P(\epsilon), \epsilon^\alpha) \propto \epsilon^{-f(\alpha)}$ を $\epsilon \rightarrow 0$ で満たします。



しかし実はこれ、求めようとすると思いのほか面倒です。この案件については、もう少し能率よく、物理的解釈を取り入れやすい方法を使って求めることにしましょう。身構えることはありません。がっかりするくらい簡単です。

6.2 モーメントを用いた表現



しかし実はこれ、求めようとすると思いのほか面倒です。この案件については、もう少し能率よく、物理的解釈を取り入れやすい方法を使って求めることにしましょう。身構えることはありません。がっかりするくらい簡単です。



モーメントは定義を覚えてしまうとやるのがもうありません。 $Z_q(\epsilon) \equiv \sum_i (P_i(\epsilon))^q$ これで終わりです。悲しいですね。あっけないとはこのこと。



このモーメントから一般化次元を求めます。定義はこれまたあっさりしていて指数を $Z_q(\epsilon) \propto \epsilon^{\tau_q}$ ($\epsilon \rightarrow 0$)

から求め（実際にこの性質を満たしているかも調べなければらめ）

$$D_q(q-1) = \tau_q$$

から D_q を求めます。 $q = 1$ の場合はちょっと扱いが特殊になりますね。



D_q の意味をちょっと考えてみましょう。まずは $q = 0$ からです。

$$D_0 = -\frac{\ln Z_0(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

$Z_0(\epsilon)$ は粒子がいる枠の数なので、これはフラクタル次元に等しいことが解ります。



D_1 についても考えましょう。

$q = 1 + \delta$, $\delta \rightarrow 0$ とすることで

$$D_1 = \frac{\sum_i P_i \ln P_i}{\ln \epsilon}$$

となります。これは確率分布の情報量とみなすことが可能です。



一般化次元 $D(q)$ について、いくつかの典型的な形を議論しておきましょう。DLA のようにフラクタル次元一つであらわせるクラスターは $P_i(\epsilon)$ が 0 か 1 しか値をとらないとみなし、 D_q は値によらず一定になります。また、一般的には D は q に対して単調減少のようです。



さて、とっとと $f(\alpha)$ を求めましょう。

$$Z_q(\epsilon) \propto \int d\alpha \epsilon^{q\alpha - f(\alpha)}$$

この形から、 $q\alpha - f(\alpha)$ の極小の値でほとんど Z が決まることが解りますね。



極小を取る条件はいたってシンプルです。 q に対応する極小となる α を $\alpha_0(q)$ とし

$$\frac{d^2}{d\alpha}(q\alpha - f(\alpha)) < 0$$

$$\frac{d}{d\alpha}(q\alpha - f(\alpha)) = q - f'(\alpha_0(q)) = 0$$

$$\tau_q = (q-1)D_q = q\alpha_0(q) - f(\alpha_0(q))$$

$(q-1)D_q = q\alpha_0(q) - f(\alpha_0(q))$ の両辺を q で微分して

$$\frac{d\tau_q}{dq} = \alpha_0(q) + q\alpha'_0(q) - \alpha'_0(q)f'(\alpha_0(q))$$

ここより

$$\alpha_0(q) = \frac{d\tau_q}{dq}$$

$$f(\alpha_0(q)) = q\alpha_0(q) - \tau_q$$

が求められます。うれしいですね。まあ、具体的な例は各自頑張って作ってください。



6.3 統計力学とのつながり



$$Z_q = \sum_i (P_i)^q = \sum_i \exp[-(-\ln P_i)q]$$

とすれば $q \rightarrow \beta$ 、 $-\ln P_i \rightarrow E_i$ とできます。

この調子で、 Z を分配関数と考えるので、

$$\langle E \rangle = \frac{\partial}{\partial \beta} (-\ln Z) = \frac{\partial}{\partial q} (q\alpha - f(\alpha)) = \alpha$$

$$F = \frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{1}{\beta} (q\alpha - f(\alpha)) = \frac{\tau_q}{\beta}$$

$$S - \alpha = -TS = \frac{f(\alpha)}{\beta} \text{ となります。まとめると}$$

$$q \rightarrow \beta$$

$$\tau_q \rightarrow \beta F$$

$$\alpha \rightarrow E$$

$$f \rightarrow S$$



です。此処までの計算が分配関数と似たような振る舞いをしているという話ですね。どこかで応用できるかもしれません。

7 マルチフラクタル応用-乱流と戯れる



ぎゃああああああああああ



(ほっぺたになるとをくっつけて)

おやおや、絹を裂くような悲鳴が聞こえたと思ってきてみれば、このビラは？
なるほど。さしずめこれを配るのが仕事だったのかしら。



.....

そうね。風の力を使えば迅速に配れそうね。たまには善い行いをしてみるかしら。



外の世界の人達にいちいち流体の基礎から説明するのはしんどいので、ナビエストークス方程式はどうか理解して頂戴ね♪

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \nabla^2 u + f$$

f は外力 γ は粘性ですね。さて、この式にスケーリング

$$x \rightarrow \lambda x, t \rightarrow \lambda^{1-\alpha/3} t \text{ をかけるとどうなるでしょう。}$$



まず、各種物理量が変わりますね。

$$u \rightarrow \lambda^{\alpha/3} u, p \rightarrow \lambda^{2\alpha/3} p, \gamma \rightarrow \lambda^{1+\alpha/3} \gamma$$

となり、入れればわかることですが、ナビエストークスを満たします。

さて、乱流は大きい渦がどんどん小さくなっていき発散していく現象です。現象から、以下の物理的なパラメータを置けると仮定します。 n は渦のサイズを表現する添え字と思ってください。



l_n : 渦の大きさ

δu_n : 渦の速さ

$$t_n = \frac{l_n}{\delta u_n} : \text{渦を回すのにかかる時間}$$

$$E_n = \frac{\delta u_n^2}{2} : \text{渦のエネルギー}$$

$$\epsilon_n = \frac{E_n}{t_n} : \text{エネルギーを送る効率} \quad t_n^{dis} = \frac{l_n^2}{\gamma} : \text{散逸の速さ}$$

「乱流にどうフラクタルを使うか」ですが、大きい渦が小さい渦に分解してエネルギーを散逸させる時に大きい渦と小さい渦の大きさの比が同じようなものと予想して使います。



$$\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \frac{l_n}{l_{n-1}} = \frac{1}{2} \quad (2 \text{ でなくてもよい})$$

$x \rightarrow \lambda x$ のスケーリングに δ_n を適用すると



$$\frac{\delta u_n}{\delta u_0} = \delta_n^{\alpha/3}$$

$$\frac{\delta p_n}{\delta p_0} = \delta_n^{2\alpha/3}$$

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \delta_n^{\alpha-1}$$

三つ目の式より

$$\alpha = \frac{\ln(\epsilon_n/\epsilon)}{\ln \delta_n} + 1$$

さて、ここからが釈然としないタイムです。



渦の大きさによるエネルギー散逸効率は α で表されましたね。実際の乱流のエネルギー散逸は様々な α の重ね合わせで作れるとします。

α で示される散逸の確率密度を $P(\alpha)$ とし、 $P(\alpha)$ がマルチフラクタル的性質

$$P(\alpha) = c_\alpha \delta_n^{d-f(\alpha)}$$

(確率なので枠数 δ_n^{-d} で割らなければならない)



を満たすとする、 $P(\alpha)$ を上手く「決めつける」ことによって $f(\alpha)$ を求めることができます。こうして求めた $f(\alpha)$ を使って乱流の状態を予想していきます。

具体的には $f(\alpha)$ が求められていることを基に、 q 次のモーメントを求めていきます。



$$\sum \left(\frac{\epsilon_n l_n^d}{\epsilon_0 l_0^d} \right)^q \propto \delta_n^{(\alpha-1+d)q}$$

$$q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$$

$\sum$ の中身は先ほどのマルチフラクタルではある枠の中の点の数の濃度のモーメントでしたが、今度は枠の中の時間あたりの散逸の速さのモーメントになっていますね。



さて、これであらかたビラは配れたことでしょう。死神が感謝する顔が目に浮かびますね♪



後日



(プロレス技をかけながら)
で、歩き回る時は「自己回避型非整数ブラウン運動をするように」ってどういう意味？
前より管理が面倒になったじゃない。人手を増やすのもシミュレーションするのもお金がかかるのよ？
そこ解ってる？



これは私のせいじゃないですううう！



にやり

8 編集後記



一部トピックは文面を作る暇がなく、おそらくゼミでは扱われません。また、ページ数を見ればわかるとおり 90 分のゼミですべて終わるかは不明です。2 コマ目を希望する方はゼミ中に言ってください。

あと、しけ4の追加ゼミ候補、その概略を列挙しておきます。やりたいものがありましたらお気軽にどうぞ。

8.1 遺伝アルゴリズム



遺伝アルゴリズムを中心にした最適化アルゴリズム

遺伝アルゴリズムと言われると「なんだ生物か。俺には関係ない」と思う人が多いかも知れませんが、モンテカルロ法の拡張の一つと思うとよいでしょう。



例えば、遺伝アルゴリズムを使うと、何らかの物理変数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の最小を $x_1, x_2, \dots, x_n$ に入れる値を遺伝情報に持つ生物を作り、 f の値によって環境への適合度を決め進化させることで求めることができます。

正確さや、検索効率がモンテカルロ法に勝るかは問題とアルゴリズムの質によりますが、複雑な問題や、数学・物理以外のシミュレーションにも適応できる優れたメソッドの一つであることは間違いありません。



ゼミのコマ数は2〜3。数学的な云々よりも、具体的なアルゴリズムの構築方法を解説し、簡単な遺伝アルゴリズムが作れ、遺伝アルゴリズムの本を理解できるレベルに達することを目標とします。

余裕があったら、電荷密度を定めるのに功績を残した「確率分布と乱数を用いた最適化」を扱います。

8.2 統計



統計の技法

実験データの解析に欠かせない EM アルゴリズム、ブートストラップ法、パーティクルフィルタの扱い方を紹介します。生物物理の研究室では統計で悪あがきするよりもデータを増やしたほうがいいと言われることからお察しの通り、物理とは近そうに見えてそう近くないかもしれません。



参考文献も経済学部用の本と思しきものだったりします。しかし、何処へ行くにしても知って置いて損はないジャンルであることは間違いありません。

ゼミのコマ数は1〜2。そんなに話せる内容がない予感がします。実際に存在する統計の技法の具体的なアルゴリズムと数学を解説します。数学は本気でやると辛いので話半分に聞いてください。

8.3 分子動力学法



分子動力学法

シミュレーションの基本である分子動力学法を取り扱います。myoga 氏の MPS のゼミと内容がかぶらないか心配なのでそちらの様子を見ながらのゼミとなります。



私のゼミではシンプレクティック法の紹介や、実際に作り五月祭で動かした摩擦シミュレーションなどの解説を中心にやりたいと思います。自作 MPS がうまく行ったらその紹介もするかも知れません。ゼミは1コマで終わると思ってます。熱力学的系に凝ると2コマですね。

8.4 密度汎関数法



化学を扱うのに欠かせない、多体のシュレディンガー方程式の近似解を求める方法です。極めて物理臭さが漂いますが、個人の力でこれを実装するのはほぼ不可能でしょう。知的満足を得たり、誰かのシミュレーションに突っ込みを入れたりするのに使うことになるでしょう。



ちょっと量子力学の前提が4年生向きです。そこを細かくやると時間かかります。ゼミでは密度汎関数法の考え方と、様々な密度汎関数法の例を紹介します。あと、私が大好きな「カー・パリネロ法 (CP 法)」の紹介もします。



ゼミは2コマ程度。これを勉強すると何ができるようになるというわけではありませんが、シミュレーションの王道のようなもので、知識としてはよい教養になるでしょう。